LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY
OF
CALIFORNIA

MATH-STAT.

29711

Riemann'sche Flächen

I.

Vorlesung

von

F. Klein,

gehalten während des Sommersemesters 1891–92.

Zweiter Abdruck.

GÖTTINGEN 1894.

Cat. for Math-Stat. Lib.

Gift of M. W. Haskell

MATH-STAT.

add

QA333
K6
1894
MATH.-
STAT.
LIBRARY

Inhalts-Verzeichniss.

Seite
Zielpuncte der Vorlesung 1

Erster Theil: Grundlegung der Riemann'schen Theorie.

Meine Auffassung des Riemann'schen Programms 4

I. Von der Existenz des Hauptpotentials H auf vorgegebener Riemann'schen Fläche.

A. Physikalische Betrachtung.

Die Riemann'sche Fläche als Substrat der Potentiale 8
Die Zahl p 10
Die Potentiale H, L, etc. 12

B. Mathematische Ergänzung.

Nothwendigkeit einer solchen 16
Verallgemeinerung der Voraussetzungen 20
Princip der conformen Abbildung; Historisches zum Existenzbeweise . . 26
Allgemeines Beweisverfahren 29
Aufzählung brauchbarer Flächen; die Bedeutung der Minimalflächen . . . 31

II. Synthetischer Aufbau weiterer Potentiale und einfachster Functionen.

A. Construction der Potentiale.

Verschiedene Arten von Unstetigkeiten 35
Die überall endlichen Potentiale und ihre Periodicität 41
Allgemeines Potential. Green'scher Satz 46

B. Uebergang zu den complexen Functionen.

Conjugirte Potentiale etc. 48
Unstetigkeiten der Functionen 53
Einfachste Functionen 54

C. Integrale der 1ten, 2ten, 3ten Gattung.

Normirung der Integrale erster Gattung 60
Normirung der Integrale dritter und zweiter Gattung 65
Gesammtverlauf der Integrale 1. Gattung. Conforme Abbildung der zerschnittenen Riemann'schen Fläche 70
Erste Abzählung der Moduln 80
Gesammtverlauf der Integrale 2ter und 3ter Gattung. Analytische Fortsetzung. Mehrfach periodische Functionen 85

M778677

Seite

III. Algebraische Functionen auf der Riemann'schen Fläche.

A. Allgemeine Sätze vorab.

Die Entstehung der mehrblättrigen ebenen Fläche 93
Minimalwerth der Blätterzahl 97
Bedeutung der neuesten Arbeit von Hurwitz 99

B. Herstellung algebraischer Functionen auf gegebener Riemann'schen Fläche.

Zwei unterschiedene Herstellungsmethoden 104
Riemann-Roch'scher Satz 106
Freie und gebundene Functionen 110
Endgültige Abzählung der Moduln 113
Folgerungen aus dem Riemann-Roch'schen Satz. Normalflächen, insbesondere kanonische Flächen 117
Angabe des folgenden Kapitels 126

IV. Algebraische Darstellung auf der über der Ebene ausgebreiteten Fläche.

A. Vorbemerkungen.

Die „geometrische“ Sprechweise; der „allgemeine“ Fall 128

B. Darstellung aller algebraischen Functionen durch s und z.

Auswahl des s. Seine Discriminante 131
Darstellung der anderen algebraischen Functionen 136

C. Von den zu der mehrblättrigen Fläche gehörigen „Formen“.

Formen und ganze Functionen 139
Darstellung aller Formen durch z_1, z_2 und eine zutretende Form 144
Der Satz von der Minimalbasis 149
Punctgruppen auf der Fläche, und deren Aequivalenz. Darstellung beliebiger algebraischer Functionen durch die Formen 160
Excurs über die Theorie der algebraischen ganzen Zahlen 167
Darstellung der Integrale, insbesondere auf den kanonischen Flächen . . 177

V. Anwendungen der bisher entwickelten Theorie, nebst Andeutung über deren Weiterbildung.

Gruppentheoretisches Eintheilungsprincip 183

A. Von den Minimalflächen.

Differentiation und Integration bei homogenen Variabelen 188
Darstellung von Minimalcurven 191
Uebergang zu den Minimalflächen 194

B. Zur Theorie der algebraischen Gleichungen.

R. Fläche und Glch. mit einem Parameter. Bedeutung von Tschirnhaustransformation und Resolventenbildung 200
Reguläre Flächen, überhaupt Fl. mit eindeutigen Transf. in sich 204

Seite

C. Vorläufiges über algebraische Curven.

Die Normalcurve aus einer Riemann'schen Fläche erwachsend 209
Uebertragung des Satzes von der Minimalbasis. Einordnung des Nöther'schen Fundamentalsatzes 215
Beziehung zusammengehöriger Curven auf einander 220
Darstellung von Functionen auf vorgelegter Curve 223
Rückwirkungen der Curvenlehre auf die Riemann'sche Theorie 227

Zweiter Theil: Beziehungen von Riemann's Theorie zur Lehre von den algebraischen Curven.

Ia. Allgemeiner Bericht, betreffend ebene Curven.

A. Historisches zur Grundlegung der Theorie.

Analytiker und Synthetiker. Plücker 1839 230
Chasles, v. Staudt, Grassmann 235
Postulirung eines directen Uebergangs zwischen Curven und Riemann'scher Fläche 240

B. Anschauungsmässiges.

Die reellen Züge der niedersten Ordnungscurven 242
Desgl. der niedersten Classencurven 248
Allgemeine Sätze über Curvengestalten 251
Die einfachsten Beispiele der „neuen" Flächen 255
Die neue Fläche bei beliebiger reeller Curve mit einfachsten Singularitäten Uebergang zur gewöhnlichen $(x+iy)$-Ebene etc. 261
Functionen auf der neuen Fläche. Die Bedeutung der reellen Curvenzüge 266

C. Weitere Verbindung des Plücker'schen Ideenkreises mit der Riemann'schen Theorie.

Die einfachsten Schnittpunktsätze 277
Vergleich mit dem Riemann-Roch'schen Satz 281
Fall, dass singuläre Puncte auftreten, die keine Schnittpuncte sind . . . 284
Complicirtere Fälle. Tragweite der Schnittpunctsätze 287

D. Weiterbildung der Curventheorie über den Plücker'schen Ideenkreis hinaus.

Von der Invariantentheorie linearer Substitutionen 290
Eindeutige Transformationen, insbesondere Cremona-Transformationen . . 295
Geometrie auf der Curve (Gruppirungsverhältnisse, Abzählungstechnik) . . 298
Programm für das Sommersemester 300

So. 24. 10. 91.

Seit Decennien sind die eindimensionalen algebraischen Gebilde (die algebraischen Curven) einerseits von den Functionentheoretikern, anderseits von den Geometern nach den verschiedensten Richtungen in Untersuchung gezogen worden; neuerdings beginnt man auch, bei der Discussion arithmetische Gesichtspunkte einzuführen. *Zielpunkt der gegenwärtigen Vorlesung soll sein, von der Basis der Riemannschen Flächen aus über die hauptsächlichen Theile des solcherweise entstandenen Gesammtgebietes einen Ueberblick zu geben.* Wir gewinnen so eine Grundlage, auf die wir uns stützen können, wenn wir später das im vorigen Jahre unvollendet gebliebene Programm wieder aufnehmen, nämlich allgemein die Theorie der linearen Differentialgleichungen mit algebraischen Coefficienten, bez. die

Theorie der automorphen Function erneut in Betracht ziehen. – Wie weit sich im Verlaufe der gegenwärtigen Vorlesung Neues werde bieten können, stehe dahin; immer hoffe ich, daſs dies bezüglich der *Realitätsdiscussionen* der Fall ist. Es entstehen da eigenthümliche Sätze, welche man mit den sonstigen Untersuchungen der Algebra über Wurzelrealität, also mit dem *Sturm*'schen Satze etc., in Verbindung wird setzen müſsen.

Aus dem Gesagten geht bereits hervor, daſs wir im Laufe der Vorlesung sehr verschiedenartige Gebiete der Mathematik werden berühren müſsen, und daſs wir also der Forderung unmöglich nachkommen können, die so vielfach erhoben wird, *daſs zusammenhängende mathematische Betrachtungen von einheitlicher Methode beherrscht sein sollen.* Es ist intereſsant, zu bemerken, unter wie wechselnder Gestalt diese Forderung gerade innerhalb unseres Gebietes zur Geltung gebracht worden ist.

Steiner wünschte die algebraischen Curven mit denselben synthetischen Mitteln untersucht, welche sich in der Theorie der Kegelschnitte erfolgreich gezeigt hatten, also durch die Mittel der projectiven Erzeugung etc. –

Clebsch verlangte eine consequente *algebraische* Behandlung im Anschluſs an die Vorstellungsweisen der projectiven Geometrie. —

Kronecker nimmt neuerdings die Methoden und die Begriffsbildungen der *Zahlentheorie* als Ausgangspunkt. —

Kein Zweifel, daſs jeder einzelne dieser Ansätze seine gute Berechtigung hat, sofern es sich dabei um ein *Arbeitsprogramm* handelt. Indem wir die Benutzung bestimmter Hülfsmittel in den Vordergrund stellen, stellen, werden wir gezwungen, bestimmte Fragestellungen, die sonst der Beachtung entgehen, mit aller Sorgfalt durchzuarbeiten. Aber wenn es sich darum handeln soll, eine Uebersicht über das Gesammtgebiet der algebraischen Gebilde und also eine Einsicht in den wechselweisen Zusammenhang seiner Theile zu erhalten, dann erscheint das Festhalten an der einzelnen derartigen Formulirung direct als schädlich. Jedenfalls soll die gegenwärtige Vorlesung einen ganz anderen Character tragen — wir werden unsere Leistung gerade darin suchen, den Gegenstand immer wieder unter neuen Gesichtspuncten zu sehen. Von der *Potentialtheorie* aus (die in die mathematische Physik gehört) schreiten wir zunächst zur *Functionentheorie*: den dort gefundenen Begriff der algebraischen Function nehmen wir dann als Maasstab, um die Theorie der *algebraischen Curven* und der sonstigen *algebraischen Gebilde*, mit denen sich die Geometer beschäftigen, zu verstehen; aber dieser Vergleich hat seine rückwirkende Kraft: es zeigt sich, daſs wir die functionentheoretische Entwickelung selbst weiter entwickeln müſsen zu einer *Theorie der Formen auf dem algebraischen Gebilde*, wobei dann von selbst arithmetische Momente in den Vordergrund treten.

Erster Theil. – Grundlegung der Riemann'schen Theorie.

Ich werde hier im Groſsen und Ganzen denselben Gedankengang befolgen, den ich in meiner Schrift: *Ueber Riemann's Theorie der algebraischen Functionen und ihrer Integrale.* (Leipzig 1881, erschienen 1882) skizzirt habe. Indem ich auf letztere wegen der Einzelheiten hinweise, darf ich mich darauf beschränken, jetzt nur die Hauptmomente der Ueberlegung zu bezeichnen, bez. solche Ausführungen hinzuzufügen, die sich in der Schrift nicht finden.

Wir beginnen dementsprechend damit, daſs wir irgend welche im Raume gelegene geschloſsene Fläche zu Grunde legen. Auf dieser Fläche (die wir dann eben als „Riemann'sche Fläche" bezeichnen) unterscheiden wir vorab gewiſse Potentialfunctionen u. Zu jedem u gehört ein „conjugirtes" Potential v, worauf $u + iv$ dasjenige ist, was wir als eine *complexe Function auf der Fläche* oder schlechtweg als eine *Function auf der Fläche* benennen. Unter ihnen sind besonders bemerkenswerth die eindeutigen Functionen: sie sind es, die wir als *algebraische* Functionen bezeichnen. Den Inbegriff aber der algebraischen Functionen, die solcherweise auf dem Substrat der Riemann'schen Fläche spriessen, bezeichnen wir als *algebraisches Gebilde*. Um die Verbindung mit dem gewöhnlichen Ansatze der Functiontheorie zu haben (bei dem es sich doch immer darum handelt, verschiedene Grössen von einander abhängig zu machen) brauchen wir nur die Werthe $u+iv$ der verschiedenen auf einer Fläche existirenden algebraischen Functionen auf die Werthe $u_0 + iv_0$, welche eine einzelne derselben bietet, zu beziehen: *Die $(u+iv)$ erscheinen alsdann in der That als algebraische Functionen von $(u_0 + iv_0)$ im gewöhnlichen functionentheoretischen Sinne.* Deutet man die Werthe von u_0+iv_0 in einer Ebene, so wird man, um den Verlauf der $u+iv$ zu charakterisiren, über dieser Ebene eine gewöhnliche mehrblättrige Riemann'sche Fläche construiren können. Diese mehrblättrige Fläche ist einfach das Abbild unserer ursprünglichen Fläche, wie es durch die Werthevertheilung, die $u_0 + iv_0$ über die ursprüngliche Fläche hin hat, festgelegt wird. —

Es ist vielleicht nützlich, wenn ich auf die Unterschiede, die dieser Gedankengang den gewöhnlichen Darstellungen gegenüber bietet noch ausdrücklich hinweise.

Die gewöhnlichen Darstellungen kann man dabei selbst noch in zwei Claſsen zertheilen:

Die Darstellungen der ersten Art beginnen mit der algebraischen Gleichung $f(w, z) = 0$, construiren die complexen Werthe von z in einer Ebene und suchen dann über dieser Ebene die mehrblättrige Riemann'sche Fläche, welche dem Verlaufe der Function $w(z)$ entspricht. Diese Fläche erscheint dann als ein Mittel sich über die Eigenschaften dieser Function, wie der weiteren, aus ihr ableitbaren zu orientiren, nicht aber als die eigentliche *Definition* des betr. Functionskreises. Damit ist Riemann's Grundgedanke doch nur unvollkommen wieder gegeben.

Die Darstellungen der zweiten Art beginnen damit, über der z-Ebene eine mehrblättrige Fläche zu construiren und auf ihr die Existenz gewiſser Potentiale u und Functionen $u + iv$ nachzuweisen. Das ist also gerade wie bei uns, nur daſs eine der zugehörigen algebraischen Functionen, nämlich z selbst $(= u_0 + iv_0)$ von vornherein bekannt und für die ganze Darstellung ausgezeichnet ist! Dadurch treten Momente in den Vordergrund, die allerdings ihr besonderes Intereſse besitzen und in der That fernerhin von uns besonders betrachtet werden sollen, die aber einem Erfaſsen des zunächst in Betracht kommenden Grundgedankens hinderlich sind: daſs nämlich die verschiedenen u + iv *neben* einander auf der Fläche wachsen, und daſs unter ihnen keines mehr Recht hat als eine abhängige Variable zu Grunde gelegt zu werden als jedes andere auch. Die allgemeine Theorie erscheint bei einer solchen Darstellung sozusagen in einseitiger Projection.

Ich will übrigens wegen dieser beiden Darstellungsarten auf Kap. 1 und 2 des dritten Abschnitts von Bd. 1 der von Hrn. *Fricke* bearbeiteten *Vorlesungen über elliptische Modulfunctionen* verweisen. Es liegen dort besondere Verhältniſse vor, vermöge deren es gestattet schien, an der besonderen Form der mehrblättrig über eine z-Ebene ausgebreiteten Riemann'schen Fläche festzuhalten. Unter den verschiedenen auf der Fläche existirenden algebraischen Functionen ist nämlich daselbst immer eine, die sogenannte „absolute Invariante" J, in der That a priori ausgezeichnet; daher dann die Fläche von vorneherein als über der J-Ebene gelegen angesehen wird.

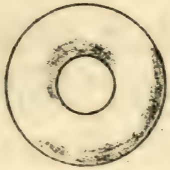
Wir besprechen nun die einzelnen Momente unseres allgemeinen Gedankenganges.

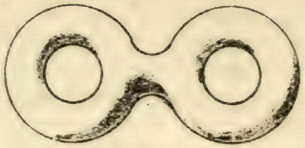
I. Von der Existenz des Hauptpotentials H auf beliebig vorgegebener Riemann'scher Fläche.

Wie in meiner Schrift werde ich die Existenz des bez. Potentials zunächst durch physikalische Betrachtungen plausibel machen, um erst dann die mathematischen Beweisgründe für den Existenzsatz zu geben, bez. die mathematischen Bedingungen zu entwickelen, unter denen er richtig ist.

A. Physikalische Betrachtung.

Wir denken uns die beliebig im Raume gegebene Riemann'sche Fläche gleichförmig mit leitender Maſse belegt und betrachten auf dem solcherweise entstandenen Conductor stationäre electrische Strömungen. Insbesondere betrachten wir diejenige stationäre electrische Strömung, welche entsteht, wenn wir an irgend zwei Stellen unserer Fläche die beiden Polenden einer galvanischen Säule aufsetzen. — Wir werden im Intereſse dieser physikalischen Experimente der zunächst völlig beliebigen Riemann'schen Fläche allerdings eine Bedingung auferlegen müſsen, nämlich die, daſs sie sich nirgends selbst durchsetzen soll. Wir denken uns die Fläche also jenachdem als ein einfaches Oval, als einen Ring, einen Doppelring:





Wir wollen aber vorweg bemerken, daſs diese Beschränkung bei der mathematischen Betrachtung in keiner Weise aufrecht erhalten werden soll und aufrecht erhalten werden kann, insofern z. B. mehrblättrige Flächen über einer Ebene immer Selbstdurchsetzungen darbieten. Die Sache macht darum für die allgemeine Theorie keinen Unterschied, weil es bei derselben überhaupt nicht darauf ankommt, daſs wir die „Riemann'sche Fläche" oder, wie wir dann lieber sagen, die „*zweidimensionale Riemann'sche Mannigfaltigkeit*", im Raume von 3 Dimensionen gelegen denken und uns dazu in diesem Raume gerade durch eine geschloſsene von Punkten gebildete Fläche versinnlichen, während doch die Frage, ob Selbstdurchdringungen eintreten oder nicht, nur aus dieser particulären Art der geometrischen Vorstellungsweise entsteht. Näheres hierüber weiter unten. — Immer wird es gestattet sein, hier schon Einiges über die Claſsification der geschloſsenen zweidimensionalen

Mannigfaltigkeiten, und also unserer Flächen, nach der *Zahl p* anzuführen. Ich will die einzelnen Bemerkungen numerieren:

1) Die Zahl p ist bekanntlich bei beliebiger stetig eindeutiger Transformation einer Fläche invariant, d. h. eine Invariante im Sinne der Analysis situs. Daſs sie die einzige derartige Invariante geschlossener Flächen ist, d. h., daſs die Gleichheit von p nicht nur die nothwendige, sondern auch die ausreichende Bedingung für die Ueberführbarkeit zweier Flächen in einander ist, findet sich bei Riemann selbst wohl nicht angegeben, obgleich nicht zu zweifeln ist, daſs er den Satz gekannt hat. Ueber weitere Literatur sowie die verschiedenen Fragen, die hier anknüpfen, orientiren Sie sich am besten in den Arbeiten von *Dyck*: „Beiträge zur Analysis situs" in Bd. 32 und 35 der Math. Annalen (1888, 1890).

2. Ich definire die Zahl p einer geschlossenen Fläche am liebsten als die *Maximalzahl der Rückkehrschnitte* (in sich selbst zurücklaufender Schnitt), welche man auf einer Fläche construiren kann, ohne daſs die Fläche dabei in Stücke zerfällt, – wobei natürlich bewiesen werden muſs, daſs man immer zu derselben Maximalzahl kommt, wie immer man die

einzelnen Rückkehrschnitte auf der Fläche anordnen mag. — Riemann und die Mehrzahl der Autoren benutzten bei der Definition vielmehr *Querschnitte*, d.h. Schnitte, welche von einem bereits vorhandenen Begränzungspuncte der Fläche zu einem anderen Begränzungspuncte hinlaufen. Um bei einer geschloſsenen Fläche überhaupt von derartigen Querschnitten sprechen zu können, muſs man dieselbe vorab irgendwo mit einer kleineren Oeffnung, einer sog. „Punctirung" versehen. Riemann zeigt, daſs man dann noch $2p$. Querschnitte gebraucht, um die Fläche in eine solche zu verwandelen, welche durch jeden weiteren Querschnitt in Stücke zerfällt, d.h. in eine einfach zusammenhängende Fläche zu verwandelen. Dementsprechend nennt er die Fläche eine $(2p+1)$-fach zusammenhängende. Nun würde aber jede weitere Punctirung der ursprünglichen Fläche, wie leicht zu sehen, den Zusammenhang derselben (d.h. den durch Riemann's Zählweise definirten Zusammenhang) um 1 erhöhen. Es scheint daher natürlich, auch die erste Punctirung als eine Operation vom Gewichte 1 in Rechnung zu stellen, und also nicht $2p+1$, sondern $2p$, als Zusammenhangszahl der geschloſsenen Fläche zu bezeichnen. Inzwischen sind die Vorschläge, welche *Schläfli* und ich in dieser Hinsicht gemacht haben (vergl. Annalen VII, 1874), nicht weiter beachtet worden. Um nicht mit mir selbst in Conflict zu kommen, habe ich daher schon lange die Gewohnheit angenommen, überhaupt nicht von einer „Zusammenhangszahl" $2p$ oder $2p+1$ zu sprechen, sondern nur noch von einer „Zahl" p.

3. Die beiden Definitionen der Zahl p sind „innere" Definitionen derselben, d. h. sie operiren nur mit der Fläche als solcher, sie treten nicht aus der Fläche in den dreifach ausgedehnten Raum hinaus, in dem wir die Fläche gelegen denken mögen. Es giebt aber nicht minder elegante „äuſsere" Definitionen derselben, z. B. durch die *Gesammtkrümmung* der Flächen. Vergl. die Entwickelungen von Dyck l. c., die sich an Ideenbildungen von *Kronecker* anschlieſsen.

Indem wir jetzt zur Betrachtung der auf der Fläche verlaufenden stationären elektrischen Strömungen zurückkehren, richten wir unsere Aufmerksamkeit auf das jeweils zugehörige elektrische Potential. Sind p, q irgendwelche Coordinaten auf der Fläche und setzen wir das Quadrat des Bogenelementes:

$$ds^2 = E\,dp^2 + 2F\,dp\,dq + G\,dq^2,$$

so genügt dieses Potential der partiellen Differentialgleichung 2^{ter} Ordnung:

$$\sigma = \frac{\partial \dfrac{F\frac{\partial u}{\partial q} - G\frac{\partial u}{\partial p}}{\sqrt{EG-F^2}}}{\partial p} + \frac{\partial \dfrac{F\frac{\partial u}{\partial p} - E\frac{\partial u}{\partial q}}{\sqrt{EG-F^2}}}{\partial q},$$

und es zeigt sich, daſs das Potential durch diese partielle Differentialgleichung und die Randbedingungen, welche aus dem jeweiligen physikalischen Experimenten folgen, eindeutig bestimmt ist. Ich darf hier auf die Ausführungen Bezug nehmen, welche ich hierüber im zweiten Theile meiner Potentialvorlesung (Sommer 1888) gegeben habe. Der wesentliche Gedankenfortschritt, der hier vorliegt, ist der: *daſs sich die Anschauungen, die wir über den Verlauf und die Bestimmtheit der electrischen Strömungen von physikalischer Seite haben, sich jetzt in ebensoviele Theoreme umsetzen über die Lösungen, welche die vorgenannte partielle Differentialgleichung auf unserer Fläche zuläſst*.

Insbesondere erfahren wir aus der elektrischen Strömung, die entsteht, wenn wir die beiden Pole einer galvanischen Säule an irgend zwei Stellen der Fläche aufsetzen, die Existenz des sogenannten

Hauptpotentials der Fläche:

$$\mathcal{H}^{\xi,\eta}_{\xi',\eta'}$$

Hier sind ξ', y' die beiden Einleitungsstellen, die logarithmische Unendlichkeitsstellen von H sind. Möge die Stromstärke insbesondere so regulirt sein, daſs H in der Nähe von ξ' unendlich wird, wie $\log r'$ (unter r' die Entfernung von ξ' verstanden); in y' wird daſselbe dann unendlich, wie $-\log s'$ (unter s' die Entfernung von y' verstanden). Dadurch ist dann H bis auf eine additive Constante bestimmt. Um diese festzulegen, dient der Hülfspunct y, der dem H oben an zweiter Stelle als Index zugesetzt ist. Wir bedingen einfach, daſs H für $\xi = y$ verschwinden soll. ξ ist natürlich der Name für den auf der Fläche veränderlichen Punct. Es giebt übrigens eine Reihe von Sätzen, welche sich auf die Vertauschung der Puncte ξ, y, ξ', y' beziehen. Es sind dies die folgenden:

Mo. 28.10.91.

$$1)\ H^{\xi y}_{\xi' y'} = -H^{y \xi}_{\xi' y'}, \qquad 2)\ H^{\xi y}_{\xi' y'} = -H^{\xi y}_{y' \xi'},$$

sowie der sog. Satz von der Vertauschung von

„*Parameter und Argument*"

$$3).\ \mathcal{H}^{\xi\, y}_{\xi'\, y'} = \mathcal{H}^{\xi'\, y'}_{\xi\, y}.$$

Dieser letztere Satz ist, wie in der genannten Vorlesung ausgeführt wird, dadurch zu gewinnen, daſs man den in der gewöhnlichen Potentialtheorie bekannten „*Green*'schen Satz" auf unsere Potentiale überträgt, nachdem man vorher unsere Fläche durch geeignetes Querschnittssystem in eine einfach zusammenhängende Fläche verwandelt hat. —

Ebenda wird dann noch aus $\mathcal{H}^{\xi\, y}_{\xi'\, y'}$, indem man ξ' mit y' zusammenrücken läſst und gleichzeitig mit einer unendlich werdenden Constante multiplicirt, das *Elementarpotential*:

$$\mathcal{L}^{\xi\, y}_{\xi'}$$

abgeleitet. Dasselbe hat statt der zwei logarithmischen Unstetigkeitspunkte von $\mathcal{H}$ einen „einfachen algebraischen" Unstetigkeitspunkt, wo das Potential unstetig wird, wie $M.\frac{\cos\varphi}{r}$ für $r=0$, unter M eine geeignete Constante, unter φ den Winkel verstanden, der von einer bestimmten durch den Unstetigkeitspunkt laufenden Richtung, der „Axe des singulären Punktes" gezählt wird.

Der Uebergang von H zu L ist ganz derselbe, wie der in der gewöhnlichen Potentialtheorie übliche vom Potential eines gewöhnlichen Maſsenpunktes zum Potential eines magnetischen Moleküls. Der Uebergang kann natürlich auch so gewonnen werden, daſs man H nach ξ' differentiirt; differentiiren wir nach ξ' wiederholt, so entstehen höhere Potentiale $\bar{L}_{\xi'}$, $\bar{\bar{L}}_{\xi'}$, etc. mit doppeltem, dreifachem algebraischen Unstetigkeitspunkt.

Die so gewonnenen H, L, $\bar{L}$, $\bar{\bar{L}}$ sind nun sozusagen die Bausteine, aus denen man die allgemeinsten von uns auf der Fläche in Betracht zuziehenden Potentiale sowie complexen Functionen zusammengesetzt.

Wir verschieben das aber und geben vorab:

B. Mathematische Ergänzung.

Die physikalische Betrachtung, welche wir voraus stellten, hat jedenfalls sog. *heuristischen* Werth, d.h. sie läſst die Theoreme, welche wir erreichen wollen, in besonders übersichtlicher Form entstehen, so zwar daſs man glauben könnte, sie selbst gefunden zu haben (wie denn die physikalische Betrachtung auch historisch genommen der Austoſs zur Aufſtellung der Theoreme gegeben hat}. Aber sie macht einen mathematischen Beweis der Theoreme, wie überhaupt eine mathematische Präcisirung derselben nicht überflüſsig. Ich will dies hier doch eingehender erläutern, damit in dieser Hinsicht gar keine Unklarheit bleibe.

Zunächst bemerke man, daſs die Aufſtellung unserer Theoreme an das physikalische Experiment nicht unmittelbar, sondern nur vermöge eines Analogieschluſses anknüpft. Wenn wir die elektrische Strömung in einer Fläche durch eine partielle Differentialgleichung beschreiben, so ist das ja kein exactes Gegenbild deſsen, was nach unseren heutigen physikalischen Ueberzeugungen in einer leitenden Fläche geschieht. Vielmehr handelt es sich den letzteren zufolge bei einer elektrischen Strömung um einen discontinuirlichen Vorgang in einem molecular aufgebauten Medium. Der Gebrauch der partiellen Differentialgleichung (wie überhaupt die Annahme, daſs es sich um die Strömung in einer „Fläche" handelt, d. h. in einem Körper, deſsen Querdimensionen durchaus verschwindet) sind nur insofern gerechtfertigt, als die Erfahrung lehrt, daſs in den einfacheren

Fällen, die wir mathematisch beherschen können, die hieraus entstehenden Folgerungen mit den Ergebniſsen der Experimentes experimentell übereinstimmen. *Daſs aber die Uebereinstimmung noch weiter reicht, insbesondere also, daſs wir Sätze über die Integrale der partiellen Differentialgleichung in noch unbekannten Fällen derselben entnehmen können, ist in keiner Weise nothwendig*. Es ist das, wie gesagt, nur ein *Analogie*schluſs, wie er wohl dem naturwiſsenschaftlichen, nicht aber dem mathematischen Denken entspricht. –

Viel wichtiger aber erscheint mir an hiesiger Stelle hervorzuheben, daſs die Gröſsenvorstellungen, mit denen man bei der physikalischen Aufstellung unserer Sätze operirt, überhaupt nicht denjenigen Grad der Präcision haben, der für das Substrat einer mathematischen Entwickelung nothwendig ist. Es haftet das nicht an der physikalischen Doctrin, sondern überhaupt an unserer Raumanschauung. Ich habe da Ueberlegungen zu streifen, die ich zuerst 1873 in den Erlanger Berichten berührt habe (Ueber den Functionsbegriff und deſsen Darstellung durch eine willkürliche Curve, abgedruckt Annalen 22) und auf die ich von anderer Seite in den Schluſsbemerkungen meines neuesten Aufsatzes „Zur Nicht-euklidischen Geometrie" (Ann. 37, 1890) eingegangen bin. Die Sache ist die, daſs ich die naive Raumanschauung (mit der man operirt, wenn man von einer willkürlichen Curve oder Fläche spricht) überhaupt nicht für etwas Exactes halte. Das Exacte kommt in die Geometrie erst hinein, indem man für gewiſse Curven und Flächen (die geraden Linien und Ebenen, bez. die Kreise und Kugeln) die Exactheit vermöge der sogenannten Axiome *postulirt*. Exact ist daraufhin jede Curve oder Fläche, deren Definition man an die Geraden und Ebenen etc. vermöge einer *gesetzmäſsigen Erzeugung* anknüpft. Es ist das ziemlich daſselbe, als wenn man sagt: jede Curve oder Fläche, deren Definition man durch eine Gleichung zwischen x, y, z giebt. Und in dem so gewonnenen exacten Gebiete giebt es dann Unterschiede, welche die naive Raumanschauung gar nicht kennt: die Unterscheidung stetiger Curven oder Flächen in analytische und solche, die es nicht sind, in differentiirbare und solche, welche gar keine, oder nur erste, oder nur erste und zweite, ... Differentialquotienten haben. Bei unserer physikalischen Construktion haben wir von derartigen Unterscheidungen überhaupt nicht gesprochen. Soll nun der Satz von der Existenz des Hauptpotentials $H^{\xi\,\eta}_{\xi'\eta'}$ unterschiedslos für alle hier unterschiedenen Flächenarten gelten oder nur für einige? Und für welche denn? Diese Frage, auf die wir von physikalischer Seite gar nicht vorbereitet sind, zeigt deutlicher als Alles Andere, das unser Existenztheorem der *mathematischen Präcisirung* bedarf, zunächst der Präcisirung in den Voraussetzungen, unter denen es gelten soll, dann natürlich auch der Präcisirungen beim Beweise. –

Können wir so den physikalischen Ansatz nicht als vollen Beweis unseres Existenzsatzes gelten lassen, so mögen wir den Existenzsatz selbst vorab über die *Prämissen hinaus*, die beim physikalischen Experimente nöthig sind, noch *verallgemeinern*. Offenbar kann für die mathematische Geltung des Satzes in keiner Weise in Betracht kommen, daß wir gerade auf einer Fläche unseres Raumes operieren: das Wesentliche wird sein, daß es eine zweifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit ist. *Wir setzen also die Riemann'sche Fläche fortan* *durch eine Riemann'sche Mannigfaltigkeit, d.h. eine zweidimensionale geschloſsene Mannigfaltigkeit, auf welcher irgendein definirter Differentialausdruck*

$$ds^2 = E\,dp^2 + 2\,F\,dp\,dq + G\,dq^2$$

vorgegeben ist. Ob diese Mannigfaltigkeit in einem Raume von 3 oder mehr Dimensionen gelegen ist oder unabhängig von jedem aeuſseren Raume gedacht ist, das ist uns dabei ganz gleichgültig. So oft es uns bequem ist, suchen wir uns für sie ein Bild im Raume von 3 Dimensionen, aber das braucht nicht gerade eine geschloſsene Fläche zu sein und auch braucht das ds^2 nicht gerade das Quadrat des für die Fläche geltenden Bogenelementes vorzustellen, wie wir sogleich noch näher ausführen.

Vorab haben wir unserer Mannigfaltigkeit, damit sie als Riemann'sche Mannigfaltigkeit überhaupt brauchbar sei, jedenfalls eine wesentliche Bedingung aufzuerlegen. Die Unterscheidung, um welche es sich dabei handelt, tritt schon bei den geschloſsenen Flächen unseres Raumes auf, sofern wir Flächen zulaſsen, die sich selbst durchsetzen (was wir das vorige Mal, als wir das physikalische Experiment anstellten, ausdrücklich ausgeschloſsen haben). Solche Flächen können nämlich sogenannte *Doppelflächen* sein, d.h. Flächen, bei denen man zwischen den beiden Seiten der Fläche nicht scheiden kann, weil man so über die Fläche hinlaufen kann, daſs man von der einen Seite auf die andere hinüber kommt. Diese Thatsache, welche zuerst von *Moebius* entdeckt worden ist*), finden Sie ausführlich u.A. in dem ersten der beiden Aufsätze von Dyck besprochen. Dieselbe betrifft die inneren Zusammenhangsverhältniſse der Fläche, nicht ihre Beziehungen zu einem umgebenden Raume. Denn sie kann dahin ausgesprochen werden, daſs bei einer Doppelfläche eine kleine auf der Fläche gezeichnete und mit einem bestimmten Sinne versehene „Indicatrix" so über die Fläche hin verschoben werden kann, daſs sie an ihren ursprünglichen Ort *mit umgekehrtem Drehsinne* zurückkommt. Eben darum aber überträgt sich die Unterscheidung zwischen Doppelflächen und einfachen Flächen auf zweidimensionale Mannigfaltigkeiten überhaupt, und wir müſsen zu ihr bei der Definition des Wortes „Riemann'sche Mannigfaltigkeit" Stellung nehmen. Wir wollen ausdrücklich bedingen, *daſs unsere Riemann'schen Mannigfaltigkeiten keine Doppelmannigfal-*

---

*) Implicite ist dieselbe übrigens bereits in v. *Staudt's* Geometrie der Lage enthalten.

digkeiten sein sollen. Anderenfalls würde Alles das, was wir fernerhin über Zerschneidung derselben etc. zu sagen haben, nicht ohne Weiteres zu brauchen sein, und es würde der ganze Existenzbeweis, den wir geben, hinfällig sein. –

Wir erläutern jetzt verschiedene Möglichkeiten, eine solche Riemann'sche Mannigfaltigkeit in unserem dreidimensionalen Raume vorzustellen:*)

Soll dies durch eine geschloſsene Fläche geschehen, so ist für die mathematische Vorstellung in keiner Weise hinderlich, wenn sich die Fläche selbst durchsetzt. Wir werden vielmehr Flächen, die sich selbstdurchsetzen, hier um so mehr in Betracht ziehen wollen, als die gewöhnlichen über der $(x+iy)$-Ebene oder der $(x+iy)$-Kugel ausgebreiteten mehrblättrigen Flächen Selbstdurchsetzungen in ihren Verzweigungsschnitten immer darbieten.

Aber es kann dies ebensowohl durch *offene* Flächenstücke geschehen, deren Randcurven durch irgend welches Gesetz paarweise zusammengeordnet sind (so daſs man, wenn man über das Flächenstück schreitend an die eine Randcurve gelangt, nun gleich an der entsprechenden Stelle der zugeordneten Randcurve weiterzugehen hat). Derartige offene Flächenstücke bezeichne ich als *Fundamentalbereiche (Riemann'sche Bereiche)*; ich darf daran erinnern, daſs wir im vorigen Jahre von denselben wiederholten Gebrauch gemacht haben. –

---

*) Vergl. meinen Aufsatz in Bd. 21 der Math. Annalen (1882): Neue Beiträge zur Riemann'schen Functionentheorie.

Indem wir so die Riemann'sche Mannigfaltigkeit in unserem Raume deuten, denken wir uns das zugehörige ds^2 zunächst, so lange nicht ausdrücklich etwas Anderes festgesetzt wird, als *das Quadrat des gewöhnlichen Bogenelementes der Fläche*; wir bemerkten aber schon, daſs gar nichts im Wege steht, auch irgendwelchen anderen auf unseren Flächen durchaus definiten Differentialausdruck $Edp^2 + 2\,F dp\,dq + G\,dq^2$ mit ds^2 zu bezeichnen, und es liegt sogar die Frage nahe, zu der wir später werden Stellung nehmen müſsen, ob sich nicht noch eine gute Bedeutung für die von uns anzustellenden Betrachtungen ergeben wird, wenn dem ds^2 gestattet wird, für einzelne Theile der in Betracht kommenden Fläche *indefinit* zu sein?

Jedenfalls also haben wir im Raume von 3 Dimensionen sehr verschiedene Möglichkeiten, eine und dieselbe Riemann'sche Mannigfaltigkeit zu deuten. Jede dieser Möglichkeiten giebt uns sozusagen eine *Erscheinungsform* der eigentlich allein in Betracht kommenden, ganz abstrakt zu denkenden Mannigfaltigkeit.

Im Allgemeinen ist es natürlich So. 31. 10. 91. bequem, bei der Annahme zu bleiben, ds^2 bedeute das Quadrat des Bogenelementes: man hat bei dieser Annahme für alle an ds^2 anknüpfenden Betrachtungen die bequeme Redeweise der metrischen Geometrie zur Verfügung. – Beachten wir jetzt, daſs die partielle Differentialgleichung des Potentials

$$\frac{\partial \dfrac{F\frac{\partial u}{\partial q} - G\frac{\partial u}{\partial p}}{\sqrt{EG-F^2}}}{\partial p} + \frac{\partial \dfrac{F\frac{\partial u}{\partial p} - E\frac{\partial u}{dq}}{\sqrt{EG-F^2}}}{\partial q} = 0$$

nicht wechselt, wenn wir E, F, G mit irgend welchem gemeinsamen Factor multipliciren, also ds^2 durch $M \cdot ds^2$ ersetzen. In abstracter Form wird dies heissen: *Bei der Definition des Potentials kommt nicht sowohl die Differentialform* ds^2, *sondern die Differentialgleichung* $ds^2 = 0$ *in Betracht.* Indem wir aber ds die concrete Bedeutung des Bogenelementes geben, dürfen wir den Satz so aussprechen. *Zwei Flächen, welche eindeutig, conform aufeinander bezogen sind, tragen dieselben Potentiale, und sind also für unsere functiontheoretischen Zwecke gleichwerthig.**) Man wähle nämlich die Coordinaten p, q auf den Flächen so, daſs entsprechende Punkte der beiden Flächen die gleichen Coordinaten bekommen. Ist dann das Bogenelement der einen Fläche durch $ds^2 = E\,dp^2 + 2\,F\,dp\,dq + G\,dq^2$ gegeben, so wird, wegen der Conformität der Beziehung das Bogenelement der anderen Fläche der Formel $ds^2 = M\,(E\,dp^2 + 2\,F\,dp\,dq + G\,dq^2)$ genügen müſsen, unter M irgendeinen Factor verstanden. Eine Function $U\,(p\,q)$ also, die der Differentialgleichung des Potentials auf der ersten Fläche genügt, genügt ebensowohl der Differentialgleichung des Potentials auf der anderen Fläche. —

Eben dieser Satz wird uns nunmehr gestatten, die Hauptfrage in Angriff zu nehmen und innerhalb gewiſser Voraussetzungen zu erledigen: die Frage nämlich, *wann eine mit einem ds^2 ausgestattete geschlos-*

---

*) Einfachstes Beispiel: zwei Flächen, die durch eine Inversion auf einander bezogen sind.

sene zweifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit, die keine Doppelmannigfaltigkeit ist, als Riemann'sche Mannigfaltigkeit brauchbar ist, d. h. wann man die Existenz zugehöriger Potentiale A oder L beweisen kann.

Wenn wir von den Betrachtungen absehen, die Prof. Schwarz in den Berliner Monatsberichten von 1870 (Ges. Abhandl. II, p. 167 ff.) darüber giebt, wie man irgendwelche einfach zusammenhängende geschloſsene Fläche eindeutig conform auf die Oberfläche einer Kugel übertragen kann, so finden wir in der Literatur die bezeichnete Frage nur für solche geschloſsene Flächen behandelt, die mehrblättrig über der Ebene ausgebreitet sind. Insbesondere hat für letztere Flächen *C. Neumann* in der zweiten Auflage seiner Vorlesungen über Abel'sche Integrale eine zusammenhängende Darstellung gegeben, auf die dann *Fricke* in Bd. I der Modulfunctionen Bezug nimmt. Das *Dirichlet'sche Princip*, deſsen sich Riemann ursprünglich für den hier zu führenden Beweis bedient hatte, ist hier ganz verlaſsen und durch die Combinationsmethoden ersetzt, welche von Schwarz und Neumann entdeckt worden sind. Ich kann hier nicht ausführlich darstellen, weſshalb man sich veranlaſst gesehen hat, das *Dirichlet'sche Princip* durchaus fallen zu laſsen;

ich könnte übrigens dieserhalb auf die Darstellung verweisen, welche ich im Winter 1887-88 von der Sachlage gegeben habe (Potential I). Dagegen muſs ich die Hauptpuncte der Neuman'schen Entwickelung recapituliren:

1) Es wird vorausgesetzt, daſs die mehrblättrige Fläche über der Ebene, die wir zu betrachten haben, nur aus einer endlichen Zahl von Blättern bestehe und nur eine endliche Zahl von Verzweigungspuncten aufweise.

2) In Folge deſsen ist es möglich, die Fläche mit einer endlichen Zahl von Kreisscheiben „dachziegelartig" zu überdecken, d.h. so, daſs jeder Punct der Fläche im Innern wenigstens einer der Kreisscheiben gelegen ist.

3) Von diesen Kreisscheiben sind natürlich diejenigen, welche einen Verzweigungspunct im Innern enthalten, mehrblättrig; dieselben laſsen sich aber je durch eine Hülfsabbildung mit Leichtigkeit auf einfach überdeckte (schlichte) Kreisscheiben conform übertragen.

4) Nun beachte man, daſs man für die schlichte Kreisscheibe die sogenannte Randwerthaufgabe ohne Weiteres lösen kann, d.h. die Aufgabe, ein Potential zu bestimmen, welches im Innern der Kreisscheibe endlich und stetig, am Rande derselben vorgegebene Werthe annimmt.

5) Fernerhin entwickelt man die sog. *Combinationsmethode*, vermöge deren man die Randaufgabe, von der schlichten Kreisscheibe beginnend für irgend welchen Bereich erledigen kann, welcher aus einer endlichen Zahl von Kreisscheiben dachzie-

gelartig aufgebaut ist: Voraussetzung dabei ist nur, daſs der bez. Bereich überhaupt noch keinen Rand hat, also keine geschloſsene Fläche vorstellt.

6) Endlich aber kann man auch zur geschloſsenen Fläche übergehen, indem man nämlich für das auf dieser zu construirende Potential bestimmte *Unstetigkeiten* vorschreibt. – So entstehen dann auf der geschloſsenen Fläche jenachdem das Hauptpotential H oder das Elementarpotential L. – In der That braucht man den hiermit skizzierten Beweisgang nur sorgfältig durchzudenken, um zu bemerken, daſs derselbe auf beliebige Flächen oder Mannigfaltigkeiten ausgedehnt werden kann und für diese den folgenden Satz liefert, durch welchen unsere Hauptfrage jedenfalls zu gutem Theile erledigt wird.

Eine zweidimensionale, geschloſsene, mit einem Bogenelement ds^2 ausgestattete Mannigfaltigkeit (welche keine Doppelmannigfaltigkeit ist) ist jedenfalls dann als Riemann'sche Mannigfaltigkeit zu brauchen, wenn man sie mit einer endlichen Zahl von Bereichen dachziegelartig überdecken kann, deren jeder eindeutig und conform auf eine schlichte Kreisscheibe abgebildet werden kann. Wird aber die somit bezeichnete Bedingung umgekehrt auch nothwendig sein, damit unsere Mannigfaltigkeit brauchbar sei? In dieser Hinsicht werden wir vorab sagen dürfen:

Sicher ist für die Brauchbarkeit der Mannigfal-

tigkeit erforderlich, daſs man die Umgebung eines jeden ihrer Punkte conform auf eine Kreisscheibe übertragen kann.

Sei nämlich u irgend ein Potential, welches in der Nähe des zu betrachtenden Punktes der Mannigfaltigkeit stetig verläuft. Wir werden dann bald lernen, ein „conjugirtes Potential" v zu construiren, welches seinerseits in der Nähe des zu betrachtenden Punctes ebenfalls stetig sein wird. Schreibt man jetzt $u + iv = x + iy$, so hat man damit eo ipso eine conforme Abbildung der Umgebung unseres Punctes auf die xy-Ebene, insbesondere also auch die Abbildung eines geeigneten Stückes der Umgebung auf die Fläche einer Kreisscheibe.

Hiernach wird man eine brauchbare Mannigfaltigkeit immer auch mit Bereichen, deren jeder sich conform auf eine „Kreisscheibe übertragen läſst, „dachziegelartig" überdecken können.

Die Frage ist nun, ob man zu diesem Zwecke mit einer endlichen Zahl von Bereichen reichen muſs. Und dies ist sicher nicht nothwendig, da man im Laufe functionentheoretischer Untersuchungen sehr oft beispielsweise auf solche Riemann'sche Flächen geführt wird, welche „unendlich blättrig" über der

Ebene ausgebreitet sind und dabei ganz gewiſs als Definition zugehöriger Functionen dienen können.

Die allgemeine Frage, nach der Brauchbarkeit einer Mannigfaltigkeit reducirt sich hiernach auf folgende:

Anzugeben, wann ein Aggregat unendlich vieler (je auf eine Kreisscheibe abbildbarer) Bereiche brauchbar ist.

Und diese Frage ist leider noch nicht beantwortet worden. Wir haben schon im vorigen Semester darauf hingewiesen, daſs eine Bearbeitung derselben dringend wünschenswerth wäre. Einstweilen aber müſsen wir von der Möglichkeit, daſs unendlich viele Bereiche zur Ueberdeckung der Mannigfaltigkeiten nöthig sein können, absehen, und uns also auf diejenigen Mannigfaltigkeiten beschränken, bei denen man mit einer endlichen Zahl von Bereichen ausreicht.

Wollen wir jetzt fragen, für welche *Flächen des dreifach ausgedehnten Raumes* (um nicht von anderen zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten zu reden) man die hiermit eingeführte Voraussetzung bis jetzt hat beweisen können. Ich muſs mich dabei auf mündliche Mittheilungen von Hrn. Prof. Schwarz beziehen, der seine hierauf bezüglichen ausgedehnten Untersuchungen leider noch nicht publicirt hat:

1. *Brauchbar sind alle geschloſsenen Flächen eines endlichen p, welche durch eine einzige analytische Gleichung darstellbar sind, vorausgesetzt, daſs keine höheren singulären Punkte auftreten.* Diese „höheren singulären Punkte" sind dann auszuschlieſsen, weil man bis jetzt nicht einmal weiſs, wie man die Coordinaten x, y, z eines Flächenpunktes in der Nähe einer beliebigen singulären Stelle in Reihen entwickelen kann, geschweige denn, daſs man über die Abbildung Angaben machen kann, durch welche die conforme Uebertragung der Umgebung der singulären Stelle auf eine Kreisscheibe gelingt.

2. *Unsere geschloſsene Fläche eines endlichen p, die keine höheren Singularitäten darbietet, darf auch aus einer endlichen Zahl verschiedener analytischer Stücke bestehen; nur ist dann anzunehmen, daſs die Durchschnittscurve zweier aneinanderstoſsender Stücke keine Ecke darbietet und daſs überhaupt nirgend mehr als zwei Stücke aneinanderstoſsen.* Beispielsweise läſst sich der Fall, wo drei ellipsoidische Stücke in einer Ecke zusammenstoſsen, bis jetzt nicht erledigen. – Der Beweis des formulirten Satzes hat selbst,

verständlich vor allen Dingen zu zeigen, daſs man auch bei einem Punkte der Durchschnittscurve zweier aneinanderstoſsenden Stücke die gesammte (hier sich auf die beiden Stücke vertheilende) Umgebung conform auf eine Kreisscheibe übertragen kann; im Uebrigen wird er auf 1) und wiederholte Anwendung der Combinationsmethode zurückkommen.

3) *Endlich läſst sich der Beweis für eine beliebige geschloſsene Fläche erbringen, die aus einer endlichen Zahl von ebenen oder sphärischen Flächenstücken besteht, also für beliebige ebene oder sphärische Polyeder.* Der Beweis wird sich ganz besonders mit den Ecken des Polyeders zu beschäftigen haben. Selbstverständlich kann man alle Kugeln, die in einer Ecke zusammenstoſsen, durch eine Inversion in Ebenen verwandeln. Aber hierbei rückt die Ecke unendlich weit, und es will dann vor allen Dingen untersucht sein, wie sich die Verhältniſse gestalten, wenn die Ebenen, welche in der unendlich fernen Ecke zusammenstoſsen, zum Theil oder alle einer festen Richtung parallel sein sollten. —

Ad. 1) müſsen wir doch noch einen besonders wichtigen Fall zur Sprache bringen. Das ist der Fall der

der seine hierauf bezüglichen ausgedehnten Untersuchungen leider noch nicht publicirt hat:

1. *Brauchbar sind alle geschloſsenen Flächen eines endlichen p, welche durch eine einzige analytische Gleichung darstellbar sind, vorausgesetzt, daſs keine höheren singulären Punkte auftreten.* Diese „höheren singulären Punkte" sind dann auszuschlieſsen, weil man bis jetzt nicht einmal weiſs, wie man die Coordinaten x, y, z eines Flächenpunktes in der Nähe einer beliebigen singulären Stelle in Reihen entwickelen kann, geschweige denn, daſs man über die Abbildung Angaben machen kann, durch welche die conforme Uebertragung der Umgebung der singulären Stelle auf eine Kreisscheibe gelingt.

2. *Unsere geschloſsene Fläche eines endlichen p, die keine höheren Singularitäten darbietet, darf auch aus einer endlichen Zahl verschiedener analytischer Stücke bestehen. nur ist dann anzunehmen, daſs die Durchschnittscurve zweier aneinanderstoſsender Stücke keine Ecke darbietet und daſs überhaupt nirgend mehr als zwei Stücke aneinanderstoſsen.* Beispielsweise läſst sich der Fall, wo drei ellipsoidische Stücke in einer Ecke zusammenstoſsen, bis jetzt nicht erledigen. – Der Beweis des formulirten Satzes hat selbst

verständlich vor allen Dingen zu zeigen, daſs man auch bei einem Punkte der Durchschnittscurve zweier aneinanderstoſsenden Stücke die gesammte (hier sich auf die beiden Stücke vertheilende) Umgebung conform auf eine Kreisscheibe übertragen kann; im Uebrigen wird er auf 1) und wiederholte Anwendung der Combinationsmethode zurückkommen.

3) Endlich läſst sich der Beweis für eine beliebige geschloſsene Fläche erbringen, die aus einer endlichen Zahl von ebenen oder sphärischen Flächenstücken besteht, also für beliebige ebene oder sphärische Polyeder. Der Beweis wird sich ganz besonders mit den Ecken des Polyeders zu beschäftigen haben. Selbstverständlich kann man alle Kugeln, die in einer Ecke zusammenstoſsen, durch eine Inversion in Ebenen verwandeln. Aber hierbei rückt die Ecke unendlich weit, und es will dann vor allen Dingen untersucht sein, wie sich die Verhältniſse gestalten, wenn die Ebenen, welche in der unendlich fernen Ecke zusammenstoſsen, zum Theil oder alle einer festen Richtung parallel sein sollen. —

Ad. 1) müſsen wir doch noch einen besonders wichtigen Fall zur Sprache bringen. Das ist der Fall der faltigkeit verstanden, die einmal die früher aufgestellte Bedingung erfüllt, keine Doppelmannigfaltigkeit zu sein, und anderseits durch eine *endliche* Zahl von Bereichen „dachziegelartig" überdeckt werden kann, deren jeder sich auf die Fläche eines Kreises conform übertragen läßt. Auf einer solchen Fläche sind wir dann der Existenz der Potentiale H und L sicher, und können also nunmehr daran gehen, aus den H und L weitere Potentiale und schliesslich complexe Functionen zusammenzusetzen. Der Gang, den ich dabei skizzire, ist von mir in Ann. 21 vorgeschlagen und auch von Hrn. *Fricke* in Bd. I der Modulfunctionen eingehalten worden. Vorher war man zum Theil bemüht gewesen, für die weiteren in Betracht kommenden Potentiale noch neue Existenzbeweise zu führen; vergl. meine Schrift von 1881, in welcher zu diesem Zwecke besondere experimentelle Anordnungen ersonnen werden, sowie den an mich gerichteten Brief von Schwarz, den ich in Bd. 21 der Annalen mittheile (Ges. Abh. von Schwarz, II, p. 303 ff.)

A) Aufbau der Potentiale.

1. Vorbemerkung über die Unstetigkeiten der L, $\bar{L}$, ...

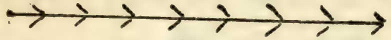
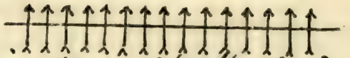
Wir haben oben aus H die Potentiale L_ξ, $\bar{L}_\xi$, $\bar{\bar{L}}_\xi$, .. hergestellt, welche je an einer einzigen Stelle einen

Unstetigkeitspunkt besaſsen, den wir einen algebraischen Unstetigkeitspunct bez. von der Ordnung 1, 2 ... nannten. Indem wir nun jetzt irgend welche Summe:

$$c\,\mathcal{L}_\xi + \bar{c}\,\bar{\mathcal{L}}_\xi + \bar{\bar{c}}\,\bar{\bar{\mathcal{L}}}_\xi + \dots$$

ins Auge faſsen, werden wir es mit einer Unstetigkeit in ξ zu thun haben, die als „Ueberlagerung" verschiedener algebraischer Unstetigkeiten erscheint. Wir nennen auch sie „algebraisch", sofern es sich bei unserer Summe nur um eine endliche Anzahl von Summanden handelt; anderenfalls würden wir, wenn wir hier schon die Terminologie der Functionentheoretiker heranholen dürfen, einen *wesentlich singulären Punkt* vor uns haben. Da sei nun die Verabredung, daſs wir fernerhin (sofern nicht ausdrücklich das Gegentheil bemerkt wird) wesentlich singuläre Punkte ausschlieſsen wollen! Nur aus praktischen Gründen, um unsere Untersuchungen nicht zu dehnen, und übrigens in Uebereinstimmung mit Riemann und den sonstigen hier zunächst in Betracht kommenden Autoren.

2. Aufbau neuer Potentiale durch Aneinanderreihung unendlich vieler $\mathcal{L}_\xi$.

Das „Elementarpotential" $\mathcal{L}_\xi$ verglichen wir schon oben mit dem Potential eines magnetischen Mo lecüls. In der That wollen wir betreffs des L_ξ nun gewiſse Operationen vornehmen, welche in der Theorie des Magnetismus angewendet zu werden pflegen: *axiale* Aneinanderreihung, *transversale* Aneinanderreihung magnetischer Molecüle: Die erstere erzeugt den gewöhnlichen Linearmagneten mit seinen zwei in seinen Endpunkten gelegenen Polen: S  N. Die andere, welche durch folgende Figur erläutert sein soll:  ergiebt zunächst (d.h. so lange wir die mit Molecülen besetzte Linie als unüberschreitbar betrachten) ein eindeutiges Potential, welches die Eigenschaft hat, auf der einen Seite der Linie um einen constanten Betrag C groſser zu sein, als auf der anderen Seite.*) Aber nun nehmen wir an, jene Linie könne beliebig oft überschritten werden. Dann erscheint unser eindeutiges Potential als der einzelne Zweig

---

*) Die ganze Erläuterung des Textes ist etwas ungenau, weil magnetische Molecüle nicht längs einer Linie, sondern nur längs einer *Fläche* transversal an einander gereiht werden können; der Rand der Fläche wird dabei eine *Wirbellinie* des zugehörigen Raumpotentiales. Die Ausdrucksform des Textes ist so gewählt, daſs die Uebertragung auf die L_ξ ohne Weiteres bewerkstelligt werden kann.

eines unendlich vieldeutigen Potentials, welches bei jeder Ueberschreitung der Moleküllinie um C wächst, und für welches die beiden Endpunkte der Moleküllinie sogenannte Wirbelpunkte vorstellen. (Ist φ der von einem der Wirbelpunkte auslaufende Polarwinkel, so haben wir zur Darstellung des Potentials in seiner nächsten Nähe $c\varphi$; für den anderen Wirbelpunkt wird's $-c\varphi$; dabei ist $C = 2\pi c$).

Wir übertragen jetzt, wie gesagt, diese Constructionen, indem wir an Stelle der von den magnetischen Molekülen ausgehenden Potentiale entsprechende L_ξ setzen, also Integrale $\int L_\xi \, d\xi$ betrachten. Die axiale Aneinanderreihung führt dann einfach zu dem Hauptpotentiale $H_{\xi\eta}$ zurück: sie ist eben die inverse Operation zu dem Differentiationsprozeſs, durch den wir L aus H abgeleitet haben. Die transversale Aneinanderreihung aber giebt etwas Neues, das Wirbelpotential $W_{\xi\eta}$. Mögen wir die in diesem $W_{\xi\eta}$ noch unbestimmte, multiplicative Constante so normirt denken, daſs sich W bei Annäherung an ξ, resp. η wie $\pm\varphi$ selbst verhält. Uebrigens werden wir für das $W_{\xi\eta}^{xy}$ mit Hülfe des Greenschen Satzes ganz ähnliche Vertauschungssätze beweisen können, wie oben für das H, Sätze, die sich in den Formeln zusammenfaſsen:

$$W^{xy}_{\xi\eta} = - W^{yx}_{\xi\eta} = - W^{xy}_{\eta\xi} = W^{\xi\eta}_{xy}.$$

Mit diesem W kommt offenbar, insofern es ein unendlich vieldeutiges Potential, ein ganz neues Moment in unseren Ansatz hinein. Seine Vieldeutigkeit ist freilich sehr einfacher Art; man könnte sie *additive* Vieldeutigkeit nennen, weil sie darin ihren vollen Ausdruck findet, daſs man zu jedem Werthe von W ein beliebiges ganzzahliges Multiplum von $C = 2\pi$ addiren darf. Daher sind die elektrischen Strömungen, welche dem Potential W auf unserer Fläche entsprechen, *eindeutig.*

Von hier aus erfaſsen wir jetzt den Begriff des *allgemeinsten* von uns auf der Fläche in's Auge zu faſsenden Potentials. Was singuläre Punkte angeht, so sollen nur logarithmische Unstetigkeitspunkte auftreten dürfen (Quellpunkte), wie beim H_0, Wirbelpunkte, wie beim W, und algebraische Unstetigkeitspunkte von der unter 1) soeben näher bezeichneten Art. Die Vieldeutigkeit aber soll immer nur eine additive sein.

Ehe wir aber dieses allgemeinste Potential untersuchen, müſsen wir noch, sofern $p > 0$ ist, eine neue Gattung von Potentialen kennen lernen, die aus dem L_ξ durch eine besondere Art transversaler Aneinanderreihung entstehen.

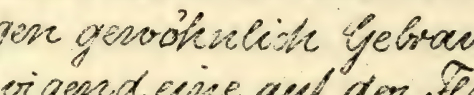
3) Die überall endlichen Potentiale u.

Dieselben entstehen, wenn man die Curve, längs deren die L_ξ transversal aneinander gereiht werden, geschloſsen in sich zurücklaufen läſst. Wir dürfen dabei die Curve nur nicht so wählen, daſs unsere Riemann'sche Fläche, längs derselben zerschnitten, in zwei Stücke zerfiele. Dann würde man (wie durch den Green'schen Satz zu zeigen) einfach zwei constante Potentialwerthe erhalten, von denen der eine auf dem einen, der andere auf dem anderen Stücke der Riemann'schen Fläche gelten würde. Eben deſshalb muſs hier $p > 0$ vorausgesetzt werden. Wir können u natürlich noch mit einem solchen Factor multipliciren, daſs es bei Ueberschreitung der Curve um einen beliebig vorzugebenen Periodicitätsmodul, z. B. um 1, zunimmt.

Versuchen wir jetzt vor allen Dingen, *uns über die Mannigfaltigkeit der verschiedenen überallendlichen Potentiale u zu unterrichten, die* auf unserer Riemann'schen Fläche existiren.

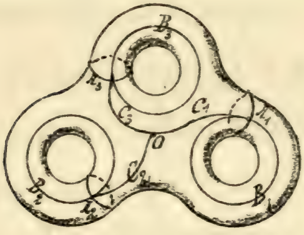
Ausgangspunkt sei dabei die Bemerkung, daſs ein jedes u nothwendig eindeutig wird, sofern wir unsere Fläche irgendwie durch geeignete Querschnitte in eine einfach zusammenhängende Fläche verwandelt haben, und wir den Verlauf des u nur innerhalb der geschloſsenen Fläche studiren. Wir brauchen zu diesem Zwecke, wie wir wiſsen, 2p Querschnitte, nachdem wir in die Fläche vorher an irgend welcher Stelle eine Oeffnung gemacht haben. Wollen wir doch gleich diejenige sog. kanonische Zerschneidungsweise definiren, von welcher man bei den vorliegenden Untersuchungen gewöhnlich Gebrauch macht.

Es sei A irgend eine auf der Fläche verlaufende geschloſsene Curve, längs deren die Fläche zerschnitten nicht in Stücke zerfällt. Man kann dann zu A immer eine zweite geschloſsene Curve B finden, welche A nur in einem Punkte überkreuzt.



Diesen Kreuzungspunkt verbinden wir jetzt mit einem beliebigen Punkte O der Fläche durch ein Verbindungsstück C. Nehmen wir dann an, es sei in O in die Fläche eine Oeffnung gemacht, so werden wir einerseits C + A, andererseits B als einen auf der Fläche verlaufenden Querschnitt ansehen können.

Die kanonische Zerschneidung unserer Fläche entsteht nun so, daſs man von der Oeffnung O aus p Paare solcher Querschnitte C + A, B auslaufen läſst, wie die nebenstehende Figur für den Fall p = 3 aufweist.



Innerhalb der so zerschnittenen Fläche ist dann das einzelne überall endliche Potential natürlich eindeutig und bietet längs der einzelnen Bestandtheile des Schnittsystems constante Werthdifferenzen (Periodicitätsmoduln) dar. Seien a_ν, b_ν die Werthdifferenzen, welche zu den Schnitten A_ν, B_ν gehören. Man überzeugt sich dann leicht, *daſs die a_ν, b_ν gewonnen werden können*, indem man *längs B_ν, A_ν integrirt.* Aber ebenso muſs die zu C_ν gehörige Differenz herauskommen, wenn man die längs $A_\nu B_\nu A_\nu^{-1} B_\nu^{-1}$ integrirt. *Die zu C_ν gehörige Differenz ist daher einfach – 0.* Eben darum läßt man die Verbindungsstücke C_ν häufig einfach fort und bezeichnet also den Inbegriff der A_ν, B_ν kurzweg als *kanonisches Schnittsystem*. Dies wird aber nur bei solchen Potentialen, bez. complexen Functionen gestattet sein, welche bei Durchlaufung irgend welcher geschlossener Wege immer solche Änderungen erleiden, die commutativ sind, denn nur unter Voraussetzung des commutativen Gesetzes wird der Weg $A B A^{-1} B^{-1}$ die Identität geben.

4. 7. 11. 1891. Ich sage nun, daß das einzelne Potential u durch die Werthdifferenzen

$$a_1, a_2, \text{- - - -}\ a_p, b_1, \text{- - - -}\ b_p$$

welche es an den Schnitten

$$A_1, A_2, \text{- - - -}\ A_p, B_1, \text{- - - -}\ B_p$$

darbietet bis auf eine Constante definirt ist. Hat man nämlich zwei überall endliche Potentiale u, u', welche die gleichen Werthdifferenzen darbieten, so wird $(u - u')$ ein überall endliches Potential sein, dessen sämmtliche Periodicitätsmoduln verschwinden. Von einem solchen aber beweist man durch den Green'schen Satz, daſs es einer Constanten gleich sein muſs. —

Hieraufhin construire man nun $2p$ *Normalpotentiale u*, deren Periodicität durch folgendes Schema gegeben ist:

$$\begin{array}{c|cccccccc} & A_1 & & \dots & A_p & B_1 & \dots & B_p \\ \hline u_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ u_2 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ u_p & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ u_{p+1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ u_{2p} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array} ;$$

es gelingt dies sofort, indem man das eine Mal die Curve A_1 transversal mit geeigneten Unstetigkeitsstellen besetzt, das zweite Mal die Curve A_2, etc. etc. Dann ist einerseits klar, daſs man ein überall endliches Potential u construiren kann, welches an den A, B ganz beliebige Periodicitätsmoduln $a_1, \dots a_p, b_1, \dots b_p$ aufweist:

$$u = a_1 u_1 + \dots a_p u_p + b_1 u_{p+1} + \dots b_p u_{2p}$$

und andererseits, daſs hiermit, sofern man noch eine beliebige additive Constante hinzufügt, *das* *allgemeinste überhaupt existirende überallendliche Potential* construirt ist. – Hiermit ist die Frage nach der Mannigfaltigkeit der auf der Fläche existirenden überallendlichen Potentiale endgültig beantwortet. —

4 Von den allgemeinsten Potentialen, die wir auf unserer Fläche in Betracht ziehen.

Wir haben nunmehr alle Mittel, um gewisse allgemeinste Potentiale auf unserer Fläche aufzubauen. Mögen für ein solches Potential bezüglich der $A_1, \ldots A_p$, $B_1, \ldots B_p$ irgend welche Periodicitätsmoduln $a_1, \ldots a_p$, $b_1, \ldots b, \ldots b_p$ vorgegeben sein. Ferner eine Anzahl logarithmischer Unstetigkeitspuncte $\xi_1, \xi_2, \ldots$, in denen das Potential unendlich werden soll, wie $c_1 \log r_1$, $c_2 \log r_2$, u.s.w. (wobei wir $\Sigma c_\nu = 0$ nehmen müssen, wie man durch physikalische Betrachtung oder durch den Green'schen Satz beweist). Dann eine Anzahl Wirbelpunkte $\xi_1', \xi_2', \ldots$, in deren Nähe sich das Potential wie $c_1' \varphi_1'$, $c_2' \varphi_2' \ldots$ verhält, unter $\varphi_1', \varphi_2' \ldots$ bezügliche Polarwinkel verstanden (wobei wieder $\Sigma c_\nu' = 0$ zu nehmen ist, wie sich ergiebt, wenn man sämmtliche ξ' auf der durch die Schnitte c, A, B einfach zusammenhängend gemachten

Fläche mit einer Curve umgeht). Endlich eine Anzahl algebraischer Unstetigkeitspuncte erster, zweiter ... Ordnung: ξ_1'', ξ_2'', ...; ξ_1''', ξ_2''', ..; .., in denen sich das Potential wie ein Multiplum von $\mathfrak{L}_{\xi_1''}$, $\mathfrak{L}_{\xi_2''}$, .., bez. $\bar{\mathfrak{L}}_{\xi_1'''}$, $\bar{\mathfrak{L}}_{\xi_2'''}$, ... verhält. Das Potential wird dann nothwendig folgende Form haben:

$$a_1 u_1 + \cdots\cdots a_p u_p + b_1 u_{p+1} + \cdots\cdots b_p u_{2p} + \sum c_\nu \mathfrak{H}_{\xi_\nu \eta} +$$
$$+ \sum c'_\nu W_{\xi'_\nu \eta'} + \sum c''_\nu \mathfrak{L}_{\xi''_\nu} + \sum c'''_\nu \bar{\mathfrak{L}}_{\xi'''_\nu} + \cdots\cdots$$
$$+ \text{Constans.}$$

Dabei bedeuten die η, η' zwei Hülfspuncte, die nur der Symmetrie wegen eingeführt sind und ganz beliebig angenommen werden können. In der That sind diese η, η' nicht etwa singuläre Punkte des dargestellten Potentials; wegen $\sum c_\nu = 0$, $\sum c'_\nu = 0$ kommt alle Singularität, welche sie zu besitzen scheinen, thatsächlich in Wegfall.

5. Schlussbemerkung des Green'schen Satzes.

Mit dem so gewonnenen Potential haben wir zugleich den Endpunkt der hier zunächst vorliegenden Entwickelung erreicht. Neue und dann sehr viel interessantere Resultate erhalten wir erst, indem wir den neuen Gedanken einführen, jedem Potential u ein anderes v, zu conjugiren und dann $u + iv$ als complexe Funtion auf der Fläche zu betrachten.-

Ich will hier nur zum Schluſse die Form noch angeben, welche der Green'sche Satz, auf den wir vorstehend verschiedentlich Bezug nehmen, bei Zugrundelegung der allgemeinen Form $ds^2 = E\,dp^2 + 2F\,dp\,dq + G\,dq^2$ annimmt (insofern diese Form nicht allgemein bekannt sein dürfte). Derselbe lautet dann:

$$-\iint dp\cdot dq\cdot\begin{vmatrix} E & F & \frac{\partial V}{\partial p} \\ F & G & \frac{\partial V}{\partial q} \\ \frac{\partial W}{\partial p} & \frac{\partial W}{\partial q} & 0 \end{vmatrix} = \int v\frac{\partial W}{\partial n}\,ds - \iint v\cdot\left\{\frac{\partial\left(\frac{G\frac{\partial W}{\partial p} - F\frac{\partial W}{\partial q}}{\sqrt{EG-F^2}}\right)}{\partial p} + \frac{\partial\left(\frac{E\frac{\partial W}{\partial q} - F\frac{\partial W}{\partial p}}{\sqrt{EG-F^2}}\right)}{\partial q}\right\}dp\cdot dq$$

$$= \int W\frac{\partial V}{\partial n}\,ds - \iint V\left\{\frac{\partial\ldots\ldots}{\partial p} + \frac{\partial\ldots\ldots}{\partial q}\right\}dp\,dq.$$

Hier sind V, W irgend zwei Functionen von p, q, die Doppelintegrale sind über irgend einen Bereich unserer Fläche, die einfachen Integrale über den Rand dieses Bereiches erstreckt. – Die gewöhnliche Form des Green'schen Satzes resultirt natürlich, indem man $E = G = 1$, $F = 0$ nimmt.

B) Uebergang zu den complexen Functionen.

Der Gedanke, durch den wir einem Potential U ein zweites, v, conjugiren, knüpft daran an, daſs die partielle Differentialgleichung, der U genügt, und die wir folgermaſsen schreiben können

$$\frac{\partial \Pi}{\partial p}+\frac{\partial K}{\partial q}=0,\ \text{wo}\left\{\begin{aligned}\Pi &= \mathcal{G}\frac{\partial u}{\partial p}-\mathcal{F}\frac{\partial u}{\partial q}:\sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G}-\mathcal{F}^2},\\ K &= \mathcal{E}\frac{\partial u}{\partial q}-\mathcal{F}\frac{\partial u}{\partial p}:\sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G}-\mathcal{F}^2}\end{aligned}\right.$$

die Form einer „Integrabilitätsbedingung" hat: die partielle Differentialgleichung zeigt, daſs

$$-K.\,dp+\Pi.\,dq$$

ein exactes Differential ist. Wir schlieſsen, daſs es eine Function v giebt, die den Bedingungen genügt:

$$-K=\frac{\partial v}{\partial p};\ \Pi=\frac{\partial v}{\partial q}.$$

Für dies v berechnen wir ferner:

$$\Pi'=\left(\mathcal{G}\frac{\partial v}{\partial p}-\mathcal{F}\frac{\partial v}{\partial q}\right):\sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G}-\mathcal{F}^2}=-\frac{\partial u}{\partial p},$$

$$K'=\left(\mathcal{E}\frac{\partial v}{\partial q}-\mathcal{F}\frac{\partial v}{\partial p}\right):\sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G}-\mathcal{F}^2}=\frac{\partial u}{\partial p}$$

woraus

$$\frac{\partial \Pi'}{\partial p}+\frac{\partial K'}{\partial q}=0$$

v ist also selbst ein Potential, und es entsteht überdies $-u$ ebenso aus dem v, wie v aus dem u. Diesem Sachverhältniſs nun geben wir kurzen Ausdruck, indem wir sagen, *V sei das zu U conjugirte Potential.* Aus U und V bilden wir dann aber die Combination $(U + iV)$ und bezeichnen dieselbe als *complexe Function auf der Fläche*.

Der Uebergang zur gewöhnlichen Functionentheorie gestaltet sich jetz unmittelbar, indem wir annehmen, $p + iq$ sei selbst eine solche complexe Function (wir haben also von vornherein als Coordinaten p, q ein Paar conjugirte Potentiale gewählt). Es wird dann

$$\Pi = \frac{\mathcal{G}}{\sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G}-\mathcal{F}^2}} = 1, \quad K = -\frac{\mathcal{F}}{\sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G}-\mathcal{F}^2}} = 0,$$

daher $\mathcal{E} = \mathcal{G}$, $\mathcal{F} = 0$: *Unsere Annahme bringt mit sich, daſs das Quadrat von ds durch eine Formel folgender Art gegeben ist: $ds^2 = \mathcal{E}(dp^2 + dq^2)$.* Nach der in der Flächentheorie üblichen Terminologie bezeichnet man diese Thatsache dadurch, daſs man sagt: „die p, q bilden ein isometrisches Coordinatensystem der Fläche". Schreibt man andererseits $p + iq = x + iy$, wo die x, y rechtwinkelige Coordinaten der Ebene sein sollen, bildet man also die Fläche so ab, daſs jedem Punkte (p, q) der Fläche derjenige Punkt (x, y) der Ebene zugeordnet wird, deſsen $x = p$ und deſsen $y = q$ ist, so ist dies eine conforme Abbildung. Denn das für die Ebene geltende Bogenelement ds wird durch die Formel gegeben: $ds^2 = dx^2 + dy^2 = dp^2 + dq^2$, ist also mit ds^2 einfach proportional. *Durch jede einzelne auf ihr existirende complexe Function $p+iq$ wird also unsere Fläche conform auf die Ebene übertragen.* Das ist ein Satz, den wir in der Folge noch sehr viel betrachten müssen. Wir sagen einstweilen vermöge desselben nur etwas über den infinitesimalen Character der Abbildung aus: später werden wir vielmehr darauf ausgehen, uns über den Gesammtverlauf der betreffenden Abbildung zu unterrichten, wie er sich bei Zugrundelegung *bestimmter* Functionen $p+iq$ gestaltet (nachdem wir unsere Fläche vorher, um $p+iq$ auf ihr eindeutig zu machen, durch ein geeignetes Schnittnetz zerschnitten haben).

Doch sehen wir, welche Form die Theorie unserer Potentiale annimmt, wenn wir die Formel $ds^2 = E(dp^2 + dq^2)$ an die Spitze stellen. Die partielle Differentialgleichung für U wird dann einfach:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial q^2} = 0$$

während andererseits der Zusammenhang zwischen U und V durch die Formeln gegeben ist:

$$\frac{\partial U}{\partial p} = \frac{\partial V}{\partial q} \qquad \frac{\partial U}{\partial q} = -\frac{\partial V}{\partial p}.$$

Aber dies sind genau die Formeln, durch welche man in den gewöhnlichen Darstellungen der Riemann'schen Theorie $(U + iV)$ als eine analytische Function der complexen Veränderlichen $(p + iq)$ definirt! Daher also der Hauptsatz, der den gesuchten Zusammenhang mit der gewöhnlichen Functionentheorie herstellt:

Betrachtet man irgend welche auf unserer Fläche existirende complexe Function (z.B. $p + iq$) als unabhängige Variable, so erweisen sich alle anderen complexen Functionen der Fläche als analytische Functionen dieser Variabelen (im Sinne der gewöhnlichen Functiontheorie)! Und der Unterschied gegen die gewöhnliche Functionentheorie ist nun der, der unmittelbar durch unseren Entwickelungsgang gegeben ist: daſs hier von vornherein sämmtliche complexe Functionen der Fläche coordinirt erscheinen, und es uns ganz überlaſsen bleibt, welche von ihnen wir als unabhängige Variable wählen wollen, während die gewöhnliche Darstellung damit anfängt, eine unabhängige Variable an die Spitze zu stellen, und sich dann nur durch eine etwas schwierige Abstraction zu der bei uns von selbst gegebenen Auffaſsung erhebt. –

Diesem Zusammenhange entspricht es, wie ich hier vorgreifend erwähnen will, daß wir diejenigen $u+iv$, welche auf unserer Fläche eindeutig sind, fernerhin als *algebraische* Functionen der Fläche bezeichnen, diejenigen aber, welche um Periodicitätsmoduln vieldeutig sind, als zugehörige *Integrale* (Abel'sche Integrale). Nimmt man nämlich irgend eine der, algebraischen Functionen als unabhängige Variable, so hängen die anderen algebraischen Functionen der Fläche von ihr in der That algebraisch ab (im Sinne der gewöhnlichen Functionentheorie), die anderen (die vieldeutigen) Functionen der Fläche erscheinen als Integrale algebraischer Functionen. *Der Inbegriff aller auf einer Fläche existirenden algebraischen Functionen, das ist gerade, was man ein eindimensionales (d.h. von einer complexen Variabelen abhängendes) algebraisches Gebilde nennt, und was nach den Angaben, die ich zu Beginn der Vorlesung gemacht habe, das eigentliche Object unserer ferneren Betrachtung sein wird.*

Ich will den berührten Zusammenhang doch gleich noch nach einer anderen Seite ausführen. Aus dem eben angeführten Green'schen Satze folgt.

insbesondere für irgend zwei Potentiale unserer Fläche

$$\int\left(u\frac{\partial u'}{\partial n}-u'\frac{\partial u}{\partial n}\right)ds = 0,$$

das Integral herumgeleitet um die Contour irgend welchen einfach zusammenhängenden Bereiches, innerhalb dessen die u, v beide eindeutig und stetig sind. Gehen wir nun von u, u' zu den zugehörigen complexen Functionen $u+iv$, $u'+iv'$ über, so kommt:

$$\int(u+iv)\cdot d(u'+iv') = 0,$$

das Integral über dieselbe Contour, wie soeben, hingeleitet. Das aber ist derselbe Satz, welcher für einfach zusammenhängende Bereiche der $(x+iy)$ Ebene seinerzeit von Cauchy aufgestellt wurde, und der in der gesammten Functionentheorie eine bekannte wichtige Rolle spielt. —

Wollen wir jetzt noch kurz die einfachsten Functionen aufzählen, welche wir vermöge unseres Ansatzes auf unserer Fläche erhalten, diejenigen Functionen nämlich, die aus den Potentialen H, W, L, $\bar{L}$ … u entstehen!

Wir können dabei gewisse Sätze vorweg aufführen:

1) Wo U einen Unstetigkeitspunkt hat, da hat auch

das conjugirte V einen singulären Punkt und umgekehrt.

2) Wo U einen Quellpunkt hat, hat V einen Wirbelpunkt und umgekehrt. Beide zusammen geben das, was wir einen logarithmischen Unstetigkeitspunkt von $U + iV$ nennen. Verhält sich $U + iV$ an irgend welcher Stelle, wie $C(\log \underline{r} + i\varphi)$, unter C irgend welche, ev. complexe Constante verstanden, so sprechen wir immer von einem logarithmischen Unstetigkeitspunkt, u. C wird deſsen logarithmisches Residuum genannt.

3) Hat U einen algebraischen Unstetigkeitspunkt von irgend welcher Ordnung, so hat V ebendort einen algebraischen Unstetigkeitspunkt von derselben Ordnung. Die Singularität von $U + iV$ wird dann ebenfalls als algebraischer Unstetigkeitspunkt von der betr. Ordnung bezeichnet.

4) Ist U auf der Fläche eindeutig, so wird darum doch V im Allgemeinen (solange wir nicht U in besonderer Weise wählen) um Periodicitätsmoduln vieldeutig sein. Denn V wird auf der Fläche durch Integration gewonnen.

$$V = \int(-K \cdot dp + \Pi \cdot dq),$$

und wenn wir diese Integration bis zu den beiden

Ufern eines Querschnittes hinleiten, so ist zunächst gar kein Grund vorhanden, weſshalb die zweierlei Werthe, die wir da erhalten, übereinstimmen sollten.

Auf Grund dieser Sätze ergiebt sich nun:

1) $\mathfrak{H}_{\xi\eta} + i\mathfrak{H}'_{\xi\eta}$ ebenso wie $W_{\xi\eta} + i W'_{\xi\eta}$ sind complexe Functionen auf der Fläche mit zwei logarithmischen Unstetigkeitspunkten ξ, η, deren logarithmische Residua bez. entgegengesetzt gleich sind, und im ersten Falle reell, im zweiten rein imaginär sind.

Uebrigens bieten beide Functionen an den kanonischen Querschnitten A, B rein imaginäre Periodicitätsmoduln dar.

Wir haben hier besondere Fälle der später sogenannten Integrale dritter Gattung vor uns.

2) $\mathfrak{L}_\xi + i\mathfrak{L}'_\xi$, $\bar{\mathfrak{L}}_\xi + i\bar{\mathfrak{L}}'_\xi$, … sind complexe Functionen der Fläche, welche einen einzelnen algebraischen Unstetigkeitspunct besitzen (. von der ersten, zweiten, etc. Ordnung), auſserdem aber an den Querschnitten A, B rein imaginäre Periodicitätsmoduln. Es sind das besondere Fälle von Integralen zweiter Gattung.

3) Aus den Normalpotentialen $u_1, u_2, \ldots u_{2p}$ entstehen sog. überall endliche Integrale oder Integrale erster Gattung. Das einzelne Integral wird

natürlich nur an einem der Querschnitte A, B einen Periodicitätsmodul haben, der nicht rein imaginär ist, vielmehr den reellen Bestandtheil 1 aufweist.

In dem besonderen Falle, dass $p = 0$ ist, vereinfachen sich natürlich diese Functionen beträchtlich, weil die Querschnitte A, B ganz fortfallen. Die Integrale erster Gattung existiren dann überhaupt nicht, die Integrale zweiter Gattung werden eindeutige, d.h. algebraische Functionen der Fläche. *Dies ist aber auch, wohlverstanden, der einzige Fall, wo wir ohne Weiteres zu algebraischen Functionen der Fläche kommen.* Für $p > 0$ führt unser Ansatz zunächst nicht zu algebraischen, sondern zu Integralfunctionen, und zwar zu solchen, welche hinsichtlich der rellen Theile ihrer Periodicitätsmoduln particularisirt sind. Dieses ist einer der wesentlichen Charactere der Riemann'schen Theorie. Ich fasse denselben nicht so auf, als wären die Integralfunctionen auch für die *systematische* Behandlung der algebraischen Gebilde die einfachsten Functionen. Das Ziel der Riemann'schen Theorie ist eben nicht (so wie ich sie verstehe) eine *systematische Behandlung* *). Ihr Ziel ist, durch eigenartigen Ansatz möglichst rasch gewiſse Anschauungen und gewiſse ihnen entsprechende Resultate zu erreichen, die man bei systematischer Discuſsion der algebraischen Gebilde bis jetzt nur schwer und zum Theil auch gar nicht gewinnen kann. Ueber die Anordnung, die wir hinterher den gewonnenen Sätzen etc. geben wollen, ist damit noch gar Nichts festgesetzt. In der That werden wir mancherlei Einseitigkeit, welche der besondere Ansatz der Riemann'schen Theorie mit sich bringt, bald abstreifen. Dahin gehört die starke Betonung, welche die Trennung der Functionen in ihren reellen und ihren imaginären Bestandtheil bislang erfuhr. Dahin gehört aber namentlich Folgendes: Für die Integralfunctionen sind die Unendlichkeitsstellen etwas durchaus Wesentliches (weil der Werth ∞ beim Integriren, wie überhaupt beim Summiren, an sich singuläre Bedeutung hat), und es ist also durchaus sachentsprechend, wenn wir die Integralfunctionen nach der Zahl und Art ihrer Unendlichkeitsstellen

---

*) In der That sollte eine systematische Behandlung die algebraischen Gebilde betre-

---

biger Dimensionenzahl umfaſsen; der Riemann'sche Ansatz aber ist, sofern nicht ganz neue Verallgemeinerungen gefunden werden, durchaus auf eindimensionale Gebilde beschränkt.

ordnen. Ganz anders aber ist es mit den algebraischen Functionen. Ist f eine solche Function, so ist nicht minder $\frac{1}{f-C}$ eine solche, unter C eine beliebige Constante verstanden. Die Punkte $f = \infty$ haben also für die Function keine tiefergehende Bedeutung als etwa die Punkte $f = C$. Nun werden wir aber bald lernen, algebraische Functionen aus Integralfunctionen additiv zusammenzusetzen.

Dabei treten dann zuvörderst die Unendlichkeitspunkte der algebraischen Function naturgemäſs in den Vordergrund. Aber das kann nur eine vorläufige Formulirung sein, wir werden hernach suchen müſsen, die Bevorzugung gerade der Unendlichkeitspunkte wieder abzustreifen.

Diese Bemerkungen sollen uns hindern, den Riemann'schen Gedankengang im folgenden so rein als möglich zur Geltung zu bringen. Daher beginnen wir jetzt, indem wir uns zur genaueren Discuſsion der auf der Fläche existirenden complexen Functionen hinwenden, nicht etwa mit der Construction der zugehörigen algebraischen Functionen, sondern mit der Betrachtung der zugehörigen Integrale. —

So 14. 11. 91.

C. Von den auf der Riemann'schen Fläche existirenden Integralen der ersten, zweiten und dritten Gattung:

1. Von der Normirung der Integrale erster Gattung.

Wir haben oben $2p$ Normalpotentiale erster Gattung: $u_1, u_2, \dots u_{2p}$ eingeführt, welche an den Querschnitten A, B das einfache Periodicitätsverhalten zeigten, welches durch folgende Tabelle angegeben wird:

	A_1	…	A_p	B_1	…	B_p
u	1	…	0	0	…	0
u_p	0	…	1	0	…	0
u_{p+1}	0	…	0	1	…	0
u_{2p}	0	…	0	0	…	1

Construiren wir ihnen entsprechend $2p$ Normalintegrale erster Gattung:

$$w_1, w_2, \dots\dots w_{2p},$$

so gilt bei ihnen die vorstehende Tabelle für die reellen Theile der Periodicitätsmoduln, welche sie an den A, B darbieten. In Folge dessen werden diese $2p$ Integrale in dem Sinne *linear-unabhängig* sein, als zwischen ihnen keine lineare Gleichung $c_1 w_1 + c_2 w_2 + \dots c_{2p} w_{2p} = C$ mit *reellen* Coëfficienten c bestehen kann. Andererseits werden sich alle anderen Integrale erster Gattung in der Gestalt darstellen laſsen:

$$w = a_1 w_1 + \dots a_p w_p + b_1 w_{p+1} + \dots b_p w_{2p} + C,$$

unter $a_1, \dots a_p, b_1 \dots b_p$ wiederum reelle Constante verstanden. Beide Sätze zusammen ergeben das Theorem, daſs das einzelne Integral w auf der Riemann'schen Fläche, sofern wir von einer additiven Constanten absehen, *durch die reellen Theile der Periodicitätsmoduln charakterisirt werden kann, die es an den A, B darbietet.*

Aber es ist eine ganz andere Art von Normirung, von der man beim Studium der zur Riemann'schen Fläche gehörigen Integrale gewöhnlich Gebrauch macht. Nicht lineare Gleichungen mit reellen Coëfficienten, sondern mit irgendwelchen complexen Coëfficienten werden in Betracht gezogen. Man vergl. was den Uebergang angeht, die Auseinandersetzungen bei Fricke, p. 52 f ff. Da zeigt sich denn:

1) daſs man auf mannigfache Weise nunmehr

p linear unabhängige Integrale $w_1, \dots w_p$ aussuchen kann (d.h. p Integrale, zwischen denen keine Relation $c_1 w_1 + \dots c_p w_p = \mathfrak{C}$ besteht, unter den c beliebige complexe Gröſsen verstanden);

2) daſs jedes andere Integral erster Gattung sich durch diese $w_1, \dots w_p$ linear ausdrückt:

$$w = c_1 w_1 + \dots c_p w_p + \mathfrak{C}.$$

3) daſs bei keinem Integral erster Gattung, welches von einer Constanten verschieden ist, die p Periodicitätsmoduln erster Art, d.h. die p Periodicitätsmoduln, welche daſselbe an den $A_1, \dots A_p$ darbietet, verschwinden können. Sind die Periodicitätsmoduln, welche w_ν aus den $A_1, \dots A_p, B_1, \dots B_p$ besitzt, $a_{\nu 1} \dots a_{\nu p}, b_{\nu 1} \dots b_{\nu p}$, so kommt diese Behauptung darauf zurück, daſs die Determinante $\begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1p} \\ a_{p1} \dots a_{pp} \end{vmatrix}$ jedenfalls einen von Null verschiedenen Werth hat.

Diesen Sätzen 1), 2), 3) entsprechend werden nun die neuen Normalintegrale $j_1, \dots j_p$ in der Weise definirt wird, daſs man ihre Periodicitätsmoduln erster Art möglichst einfach vorschreibt, namlich so, wie im nebenstehenden

	A_1	A_2		A_p
j_1	1	0	....	0
j_2	0	1	....	0
			.	
j_p	0	0	....	1

Schema angegeben ist.

Ihre Periodicitätsmoduln zweiter Art sind dann die Grössen, welche im weiteren Fortgange der Theorie als Grössen $\tau_{\alpha\beta}$ bezeichnet werden:

	B_1	B_2		B_p
j_1	τ_{12}	τ_{12}	$\ldots\ldots\ldots$	τ_{1p}
j_2	τ_{21}	τ_{22}	$\ldots\ldots\ldots$	τ_{2p}
j_p	τ_{p1}	τ_{p2}	$\ldots\ldots\ldots$	τ_{pp}

Bezüglich dieser $\tau_{\alpha\beta}$ müssen wir sofort gewisse Gleichungen und Ungleichungen, denen sie genügen, kennen lernen:

a) die Gleichungen erhält man, wenn man das Cauchy'sche Integral

$$\int j_\alpha \cdot dj_\beta = 0.$$

um die gesammte Contour der kanonisch zerschnittenen Riemann'schen Fläche herumleitet, d.h. je längs beider Ufer der A_ν, B_ν und der Verbindungsstücke c_ν. Letztere liefern dabei keinen Beitrag und können also unmittelbar fortgelassen werden. Erstere aber ergeben nach einigen Reductionen die Gleichungen: $\tau_{\alpha\beta} = \tau_{\beta\alpha}$.

b) Um die Ungleichungen zu finden, schreibe man zunächst nocheinmal den ursprünglichen Green'schen Satz unter der Voraussetzung an, daſs die beiden in ihm vorkommenden Functionen V, W der p, q ein und demselben Potentiale u gleich seien. Wir erhalten

$$\iint - dp . dq . \begin{vmatrix} E & F & \frac{\partial u}{\partial p} \\ F & G & \frac{\partial u}{\partial q} \\ \frac{\partial u}{\partial p} & \frac{\partial u}{\partial q} & 0 \end{vmatrix} = \int u \frac{\partial u}{\partial n} ds ,$$

und schlieſsen aus dem Umstande, daſs alle unter dem Doppelintegral linker Hand stehenden Elemente positiv sind, daſs auch die rechte Seite positiv sein muſs. Ist u der reelle Theil von $u + iv$, so kann man dieser rechten Seite die aequivalente Form $\int u \frac{\partial v}{\partial s} ds = \int u \, dv$ ertheilen. Den so erhaltenen Satz wende man auf irgend ein Integral erster Gattung $w = w' + i w''$ an, deſsen Periodicitätsmoduln erster und zweiter Art folgendermaſsen in ihre reellen und imaginären Bestandtheile getrennt sein sollen: $a_\nu = a'_\nu + i a''_\nu$, $b_\nu = b'_\nu + i b''_\nu$. Wir finden dann nach einigen Reductionen, daſs bei jedem Integral erster Gattung die Summe $\Sigma (a'_\nu b''_\nu - b'_\nu a''_\nu)$ positiv ist. Diesen Satz werden wir nun endlich auf das Integral $\Sigma n_\alpha j_\alpha$ an, unter $n_1 \cdots n_p$

irgend welche reelle Constante verstanden. Wir setzen

$$\tau_{\alpha\beta} = \tau'_{\alpha\beta} + i\,\tau''_{\alpha\beta}$$

und finden nach kurzer Umsetzung:

$$\sum n_\alpha n_\beta \tau''_{\alpha\beta} > 0;$$

die quadratische Form $\sum \tau_{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta$ ist also eine positive Form. In diese Aussage sind die Ungleichheiten, welche wir ableiten wollten, zusammengefaſst. —

2. Von der Normirung der Integrale dritter und zweiter Gattung.

Wir führen jetzt vorab die Betrachtung der Integrale dritter und zweiter Gattung bis zu demselben Punkte. Ich werde dabei von der Abkürzung Gebrauch machen, daſs ich die complexe Function, die wir als unabhängige Variable zu Grunde legen wollen, kurz gerade so mit x bezeichne, wie die veränderliche Stelle der Riemann'schen Fläche, die wir ins Auge fassen wollen. Andererseits ertheile ich dem Integral dritter Gattung wie früher wieder *zwei* Argumente x, y, so daſs $\Pi^{x\,y}_{\xi\,\eta}$ verschwindet, wenn x mit y zusammenfällt, es ist das nur ein Mittel, die im Integral sonst vorhandene willkürliche Constante zu fixiren, und wird weiterhin je nach Bedürfniſs bei allen Integralen erster Gattung angewandt werden. Dieses $P_{\xi\eta}^{xy}$ wird nun, wenn x an ξ oder an η heranrückt, unendlich wie $c.\log(x-\xi)$. bez. $-c.\log(x-\eta)$, unter c das logarithmische Residuum des Punctes ξ verstanden. *Wir wollen uns P in Zukunft jedenfalls so normirt denken, dass c gleich 1 ist.* Wollen wir weiter normiren, so werden wir dem P ein solches Aggregat der $j_1 \cdots j_p$ hinzufügen, *daſs alle Periodicitätsmoduln erster Art fortfallen.* Das solcherweise normirte Integral nennen wir $\Pi_{\xi\eta}^{xy}$.

Für daſselbe finden wir wieder wesentliche Eigenschaften, indem wir den Cauchy'schen Satz anwenden:

1) Wir beziehen das Integral $\int \Pi_{\xi\eta}^{xy}\, d\Pi_{\xi'\eta'}^{xy}$ auf diejenige Contour, welche von den beiderseitigen Ufern des Querschnittes A_ν, B_ν, C_ν und solcher 4 ergänzenden Schnitte gebildet wird, die von dem Hülfspuncte O nach den Unstetigkeitsstellen ξ, η, ξ', η' hinlaufen. Solcherweise kommt

$$\Pi_{\xi\eta}^{\xi'\eta'} = \Pi_{\xi'\eta'}^{\xi\eta},$$

der Satz von der Vertauschung von Parameter und Argument.

2) Wir bilden uns andererseits in entsprechender Weise die Integrale $\int \Pi_{\xi\eta}^{xy}\, dj_{\alpha}^{xy}$ und finden das einfache Resultat, daſs die Periodicitätsmoduln zweiter Art des Integrals Π die folgenden einfachen Werthe haben:

$$\begin{array}{cccc} B_1 & B_2 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & B_p \\ \hline 2i\pi j_1^{\xi\eta} & 2i\pi j_2^{\xi\eta} & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 2i\pi j_p^{\xi\eta} \end{array}.$$

Mi. 18. XI. 91

Bemerken wir heute zunächst, daſs die Normirung des Integrals dritter Gattung, die wir das vorige Mal trafen, bez. die Festsetzung, daſs dasselbe an den Stellen ξ, η die logarithmischen Residuen ± 1 haben soll, von der Function $p + iq = x$, durch deren Werth wir die Lage des Punktes x festgelegt dachten, unabhängig ist. In der That, hätten wir statt x irgend eine Function $x' = f(x)$ gewählt und also festgesetzt, das P. resp. Π an den betreffenden Stellen unendlich werden soll, wie $\log(x' - \xi')$ bez. $-\log(x' - \eta')$, so würde das auf das Nämliche hinausgekommen sein. Zum Beweise denke man sich $x' - \xi'$ nach Potenzen von $x - \xi$ entwickelt $= a(x - \xi) + b(x - \xi)^2 + \ldots.$

. Dann erscheint $\log(x' - \xi')$ in der Form $\log(x - \xi) + \log[a + b(x - \xi) + .]$, und liefert also durch $\log(x - \xi)$

dividirt für $x = \xi$ den Limes 1, – den einzigen singulären Fall abgesehen, daſs a verschwinden sollte, was eine ganz besondere Wahl der Functionen x' bedeuten würde, die wir hier nicht weiter in Betracht ziehen. Uebrigens kann man ja auch das Verhalten der Function P resp. π bei $x = \xi, y$ ohne jede Bezugnahme auf irgend welche Function $p + iq$ der Fläche dahin characterisiren: daſs P und π um $\pm 2\pi i$ wachsen, wenn das ξ, bez. y im positiven Sinne umkreist.

Wir muſsten dies vorausschicken, um auf *das abweichende Verhalten der Integrale zweiter Gattung* vorzubereiten. Wir definiren die letzteren, indem wir $P^{xy}_{\xi\eta}$, bez. $\Pi^{xy}_{\xi\eta}$ nach der Unstetigkeitsstelle ξ differentiiren:

$$Y^{xy}_{\xi} = \frac{dP}{d\xi}, \quad \Upsilon^{xy}_{\xi} = \frac{d\Pi}{d\xi},$$

(wo Υ das „transcendent normirte" Integral zweiter Gattung sein wird). Hier wird sich die Definition ändern, wenn wir statt der Function $p + iq$, die an der Unstetigkeitsstelle den Werth ξ annimmt, $\xi' = f(\xi)$ einführen wollen. Wir erhalten dann einfach:

$$Y' = \frac{dP}{d\xi'} = \frac{dP}{d\xi} \cdot \frac{d\xi}{d\xi'} = \frac{dP}{d\xi} \cdot \frac{1}{f'(\xi)}.$$

Hier ist $\frac{1}{f'(\xi)}$ irgendwelche Funktion von ξ, die wir ganz beliebig auswählen können. Daher:
$\mathcal{Y}_\xi^{xy}$ ist, so lange wir nicht die Funktion angeben, die wir bei der Differentiation des P benutzen wollen, nur erst bis auf einen Factor bestimmt, der eine willkürliche Function der Unstetigkeitsstelle ξ vorstellt.

Dasselbe gilt natürlich für Y_ξ^{xy} und tritt auch hervor, wenn wir die Periodicitätsmoduln ausschreiben, welche dasselbe an den Querschnitten A, B besitzt. Aus der Tabelle der Periodicitätsmoduln des Π erhalten wir nämlich für die des Y:

Y_ξ^{xy}	A_1	. . . .	A_p	B_1		B_p
	0	. . . .	0	$2i\pi\frac{dj_1}{d\xi}$		$2i\pi\frac{dj_p}{d\xi}$

Beiläufig bemerken wir jetzt noch, dass wir aus $\mathcal{Y}$, bez. Y, höhere Integrale zweiter Gattung $\bar{Y}_\xi, \bar{\bar{Y}}_\xi, ..$ ableiten (für die ξ ein Unstetigkeitspunkt zweiter, dritter, ... Ordnung ist), indem wir wiederholt nach ξ differentiiren. Diese höheren Integrale werden wir übrigens im Folgenden nur bei besonderen Gelegenheiten heranholen, indem wir im Allgemeinen dem Leser überlassen, sich selber zurechtzulegen, was geschieht, wenn mehrere algebraische Unstetigkeitspunkte erster Ordnung zu einem Unstetigkeitspunkt höherer Ordnung verschmelzen.

3) Genaueres Eingehen auf den Gesamtverlauf der Integrale erster Gattung.

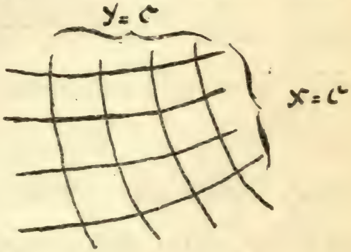
Wir werden jetzt bei den Integralen erster Gattung eine Untersuchung durchführen, die besonders geeignet scheint, in die Natur dieser Functionen einen Einblick zu eröffnen. Auf der durch die kanonischen Schnitte A_ν, B_ν zerschnittenen Riemann'schen Fläche sind, wie wir wiſsen, die Integrale w eindeutig. Wir werden nun die *eindeutige Abbildung* betrachten, welche die w von der zerschnittenen Fläche auf der x, y-Ebene entwerfen, indem man $w = x + iy$ setzt. Dieselbe Fragestellung können wir natürlich immer aufwerfen, wenn uns irgend welche complexe Function auf der Riemann'schen Fläche gegeben ist; nur müſsen wir vorher Sorge tragen, die Riemann'sche Fläche so zu zerscheiden, daſs die Function auf ihr eindeutig wird. In der That werden wir die gleiche Frage für die Integrale dritter und zweiter Gattung bald aufnehmen und später auch für die algebraischen Functionen der Riemann'schen Fläche erläutern, bei denen wir dann gar keine Zerschneidung brauchen, weil sie eo ipso auf der Riemann'schen Fläche eindeutig sind.

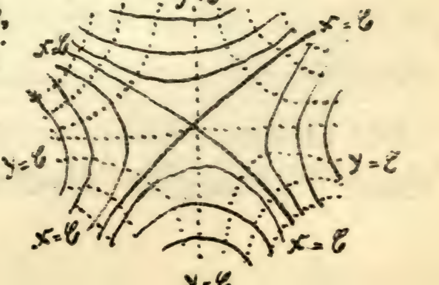
Doch kehren wir zu den Integralen erster Gattung zurück. Zweierlei werden wir über die Abbildungsfigur von vornherein aussagen können:

1) daſs sie eine p fach zusammenhängende Fläche mit p Randcurven vorstellt. Denn eine solche liegt ja in der durch A_ν, B_ν zerschnittenen Riemann'schen Fläche vor.

2) daſs sie sich nirgends ins Unendliche zieht. Denn bei den w ist ja das Unendlichwerden an sich ausgeschloſsen.

Ferner werden wir sagen, daſs die Abbildung in der Umgebung einer beliebigen Stelle conform sei. – Inzwischen sind hier besondere Punkte der Fläche als Ausnahmepunkte anzusehen. Im Allgemeinen wird durch einen Punkt der Fläche für $w = x+iy$ nur eine Curve $y = C$ nach Maaſsgabe der nebenstehenden Figur hindurchlaufen. Aber es giebt besondere Punkte der Fläche in den (wenn wir noch höhere Vorkommniſse ausschlieſsen) zwei Curven x und zwei Curven y zusammenstoſsen. Es sind dies die Punkte, die





ich bei früheren Gelegenheiten als „Kreuzungspunkte" oder auch schlechtweg als „merkwürdige Punkte" der in Betracht zu ziehenden Function, hier als des w bezeichnet habe. In ihnen ist $dx = 0$, $dy = 0$ und also $dw = 0$, bei beliebigem Fortschreiten auf der Fläche. Es würde auch noch $d^2w = 0$, $d^3w = 0$.., sein, wenn nicht zwei, sondern drei, vier, ... Curvenzüge $x = C$, bez. $y = C$ im Punkte zusammenliefen: in solchen Möglichkeiten bestehen die höheren Vorkommnisse, auf die wir soeben bereits hinwiesen, und die wir in der Folge zumeist bei Seite lassen wollen.

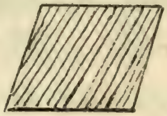
In der Umgebung einer solchen Stelle ist nun die Abbildung *keine conforme*, vielmehr finden sich die Winkel, die von einer solchen Stelle aus auf der Riemann'schen Fläche auslaufen, auf der $(x + iy)$ Ebene verdoppelt (bez. *verdreifacht* etc.) vor. Die in Rede stehenden Stellen $dw = 0$ ergeben daher für die über der $(x + iy)$ - Ebene gelegenen Abbildung *Verzweigungspunkte*, in denen *zwei* (oder im besonderen Falle, drei, vier ...) *Blätter der Abbildung zusammenhängen*. Ich werde die Zahl dieser besonderen Stellen, die beim Integral erster Gattung w auftreten, vorab ν nennen. *Die*

Bestimmung dieser Zahl v ist natürlich eine Hauptaufgabe der vorliegenden Theorie.

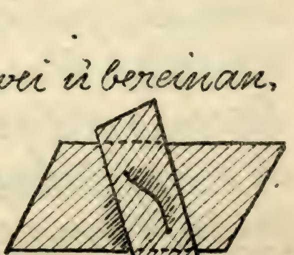
Sa. 21. 11. 91.

Unter einem *parallelogrammatischen Rahmen* verstehen wir einen aus 4 Stücken A^-, B^-, A^+, B^+ bestehenden Linienzug, der so beschaffen ist, daſs A^+ aus A^- und B^+ aus B^- durch Parallelverschiebung hervorgeht. Als *Parallelogramm* bezeichnen wir dann eine Membran, welche in diesen Rahmen eingespannt ist. Im Allgemeinen wird es bequem sein, sich den parallelogrammatischen Rahmen als von 4 Geraden gebildet vorstellen, und man kann im Falle unserer Abbildung in der That sehr häufig zu der hiermit bezeichneten Normalgestalt übergehen, was dann darauf hinauskommt, die Querschnittpaare A, B auf der Riemann'schen Fläche in zweckmäſsiger Gestalt zu wählen. Inzwischen ist dies keineswegs immer möglich, wie Beispiele, die sofort angeführt werden sollen, zeigen. Wie dem auch sei, jedenfalls ist aus der Periodicität des Integrals w klar, daſs die durch w vermittelte Abbildung der zerschnittenen Riemann'schen Fläche *in p parallelogrammatische Rahmen A^-_α B^-_α A^+_α B^+_α mit v Verzweigungspuncten eingespannt ist*, oder anders ausgedrückt: *daſs die Abbildung aus p übereinandergelagerten einfachen Parallelogrammen besteht, welche durch v Verzweigungspunkte aneinander befestigt sind.* Die Verschiebungsgröſsen $a_\alpha = a'_\alpha + i a''_\alpha$, $b_\alpha = b'_\alpha + i b''_\alpha$, durch welche bez. die A_α^+, B_α^+ aus den A_α^-, B_α^- hervorgehen, sind dabei nichts Anderes als die zu den Querschnitten A_α, B_α gehörigen Perioden unseres w.

Nehmen wir zunächst $p = 1$, so haben wir nur einen parallelogrammatischen Rahmen (den wir gerne gradlinig zeichnen können), und die in diesen Rahmen einzuspannende Abbildung trägt natürlich *keinen* Verzweigungspunkt, so daſs hier $v = 0$ ist. *Diese Thatsache, daſs sich die Fläche $p = 1$ vermöge des einen ihr zugehörigen überall endlichen Integrals auf ein schlichtes Parallelogramm überträgt, bildet die Grundlage für die Beziehung, in welcher die Theorie der bei $p = 1$ existirenden Functionen zur Theorie der eindeutigen doppeltperiodischen Functionen steht.*

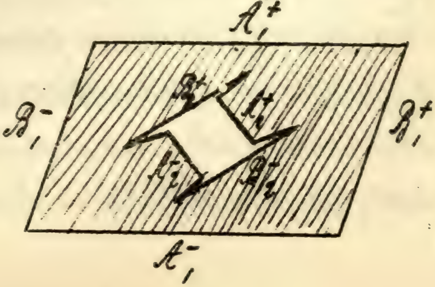


Nehmen wir ferner $p = 2$. Um zwei übereinandergelgte Parallelogramme, wie sie die nebenstehende Figur aufweist:

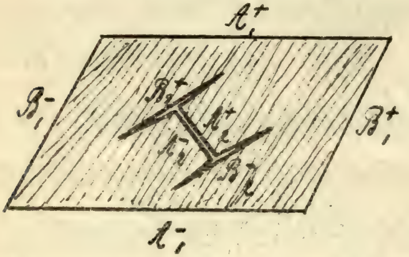


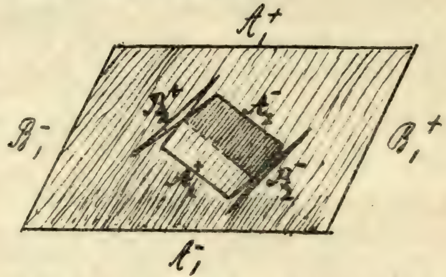
zu einem zusammenhängenden Ganzen zu verbinden, braucht man mindestens zwei Verzweigungspunkte. Andererseits kann die Zahl dieser Verzweigungspunkte aber auch nicht grösser sein. Denn sonst würde die entstehende Gesammtfigur nicht den Zusammenhang $p = 2$ haben, wie die zerschnittene Riemann'sche Fläche. Daher ist hier also $v = 2$, und bei beliebigem p, indem man p Parallelogramme übereinander schichtet, auf Grund der entsprechenden Ueberlegung $v = 2p - 2$.

Immer darf man die Bedeutung der Figuren, die man sich so für $p > 1$ herstellt, nicht überschätzen. Sie geben zunächst nur Beispiele. Die Figuren können, jenachdem man die $A_\alpha B_\alpha$ auf der Riemann'schen Fläche wählt, ganz verschieden aussehen. Bleiben wir z. Beispiel bei $p = 2$, legen aber B_2 durch die beiden Kreuzungspunkte von w (die beiden Punkte $dw = 0$) auf der Fläche hindurch. In der Abbildung wird dann sowohl B_2^-, als B_2^+ zwei Rückkehrpunkte darbieten. Da kann dann beispielsweise folgende Figur entstehen, (die man wohl



am einfachsten als Differenz zweier Parallelogramme bezeichnen könnte). Diese wieder kann sich so modificiren, daſs die beiden Gränzlinien A_2^-, A_2^+ zusammenrücken, oder auch so, daſs sie übereinander geschoben erscheinen:





Alle diese Möglichkeiten existiren, wohlverstanden, wirklich. Denn man kann umgekehrt jede derartige Figur, indem man die zusammengehörigen Ränder vereinigt denkt, als Fundamentalbereich, d. h. selber als Riemann'sche Fläche gelten laſsen, auf der dann $x + iy$ von selbst ein überall endliches Integral vorstellt: eine Auffaſsungsweise, auf die wir bald zurückkommen werden.

Demgegenüber erscheint es als eine wichtige Aufgabe: sich die *Gesammtheit* der hier möglichen Figuren deutlich zu machen. Kein Zweifel, daſs hieraus wieder neue Sätze über das Verhalten der Integrale w auf der Riemann'schen Fläche hervorgehen würden. Ich darf daran erinnern, welche Forderung die Theorie der „hypergeometrischen“ Function erfährt, indem man die wirkliche Gestalt eines durch seine Winkel gegebenen Kreisbogendreiecks bestimmt, wie von da aus sich sofort die merkwürdigsten Realitätstheoreme etc ergeben. Aehnlich muſs es hier sein, und ich nehme insbesondere in Aussicht, später von diesem Gedanken Anwendung auf die Realitätsfragen zu machen, die bei den symmetrischen Riemann'schen Flächen auftreten.

Uebrigens würde es der groſsen Unbestimmtheit unserer Figuren gegenüber erwünscht sein, noch eine andere Bestimmungsweise der Zahl $r = 2p - 2$ zu haben. Eine solche ergiebt sich einfach, wenn man auf der unzerschnittenen Riemann'schen Fläche die überall endliche Strömung betrachtet, die z. B. zum reellen Theile von $w = u + iv$ gehört. Es zeigt sich, daſs bei jeder solchen Strömung in der That $2p - 2$ Kreuzungspunkte auftreten müſsen. Vergleiche allgemeinere Betrachtungen dieser Art in meiner Schrift über Riemann, sowie bei *Poincaré* und *Dyck* (insbesondere Dyck, Ann. 32, p. 501, wo die näheren Citate gegeben sind).

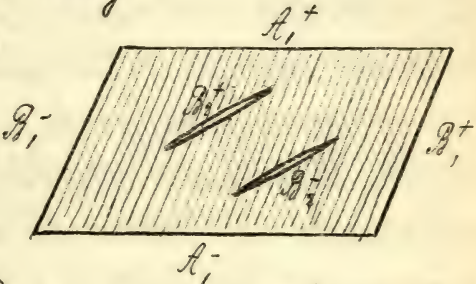
Intereſsant ist auch die Deutung, welche die früher gefundene Ungleichung zwischen den Perioden a_α, b_α von w jetzt erfährt. Dieselbe fand in der Doppelformel:

$$\iint - \begin{vmatrix} \mathfrak{E} & \mathfrak{F} & \frac{\partial w}{\partial p} \\ \mathfrak{F} & \mathfrak{G} & \frac{\partial w}{\partial q} \\ \frac{\partial w}{\partial p} & \frac{\partial w}{\partial q} & 0 \end{vmatrix} dp\,dq = \sum_1^p (a'_\alpha b''_\alpha - a''_\alpha b'_\alpha) > 0$$

ihren Ausdruck. Da erkennt man nun leicht, daſs sich das Element des Doppelintegrals auf das Flächenelement der durch w vermittelten Abbildung bezieht: *das Doppelintegral selbst ist einfach der Gesammtflächeninhalt der Abbildung*. Der einzelne Summand $(a'b'' - a''b')$ aber stellt in leicht erkennbarer Weise den Inhalt eines Parallelogramms (a, b) vor; *der Gesammtflächeninhalt erscheint also*, wie es sein muſs, *als Summe* (genauer gesagt: als algebraische Summe) *von p Prallelogrammen*. Und hiermit ist von selbst gegeben, daſs besagte Summe > 0 sein muſs. —

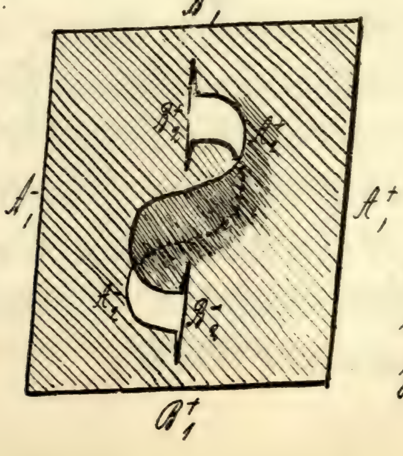
Ich habe mir noch die Aufgabe gestellt, Figuren zu zeichnen, welche unseren verschiedenen *Normalintegralen* erster Gattung entsprechen mögen.

Zunächst, was die Normalintegrale j angeht, bei denen (sofern wir $p = 2$ nehmen) jedesmal einer der Periodicitätsmoduln a_α verschwindet, so kommt man bei ihnen nothwendig zu einer solchen Figur, wie wir deren eine schon auf p 76 kennen lernten; ich setze dieselbe nocheinmal hierher, indem ich jetzt, um alle überflüssigen Linien zu vermeiden, die Stücke A_2^-, A_2^+ kurzweg fortlasse, so dass das Parallelogramm A_1^- B_1^- A_1^+ B_1^+ einfach dem Schnitte B_2 entsprechend zwei Schlitze trägt:



Schwieriger sind die Figuren für die $w_1, \dots w_{2p}$, die zu den früher betrachteten „Normalpotentialen" $u_1, \dots u_{2p}$ gehören. Bei einem derartigen w waren alle Perioden bis auf eine rein imaginär.

Nehmen wir $p = 2$ und das zu u gehörige w, so finden wir, indem wir wieder den Schnitt B_2 auf der Riemann'schen Fläche durch die beiden zugehörigen Kreuzungspunkte hindurchlegen, etwa folgende Figur:



(Dies ist die Figur, von der schon oben andeutungsweise die Rede war, insofern es bei ihr unmöglich scheint das Parallelogramm A_2^- B_2^- A_2^+ B_2^+

geradlinig abzugränzen). –

Wir benutzen endlich diese Figuren, um aus ihnen, mit Riemann, eine Folgerung zu ziehen, die besonders wichtig ist. Riemann'sche Flächen mit $p = 0$ laſsen sich immer eindeutig aufeinander conform abbilden, wie wir noch sehen werden, so daſs jede Fläche mit $p = 0$ für unsere Zwecke ebenso gut ist wie jede andere auch. Aber bei $p = 1$ ist das, wie aus der Theorie der elliptischen Function folgt, ganz gewiſs nicht so. Vielmehr enthält jede Normalform, die man bei Betrachtung der elliptischen Gebilde zu Grunde legen mag, *eine* wesentliche Constante, die auf keine Weise zu beseitigen ist: die Legendre'sche Normalform enthält ihren „Modul", die Weierstraſs'sche Normalform die „absolute Invariante" g_2^3/g_3^2.

Es tritt dies auch dadurch hervor, daſs das Parallelogramm der w Ebene zwar beliebig gedreht, vergröſsert und verschoben werden kann, indem man w mit irgendwelchen complexen Constanten multiplicirt oder um eine solche Constante vermehrt (wodurch es nicht aufhört, ein zur Riemann'schen Fläche gehöriges überall endliches Integral zu sein), daſs dabei aber das Verhältniſs $a : b$ seiner beiden Seiten durchaus ungeändert bleibt.

Man bezeichnet diese Thatsachen zusammenfaſsend dahin, daſs man sagt: Die Flächen $p=1$ haben einen Modul. Wie nun wird sich die entsprechende Theorie für $p>1$ gestalten. In dieser Hinsicht hat Riemann in No. 12 seiner Abelschen Functionen eben aus den hier von uns besprochenen Figuren den Satz abgeleitet: Die Flächen $p>1$ haben $3p-3$ Moduln.

Ehe ich die ganz einfachen Betrachtungen vortrage, aus denen dieser Satz hervorgeht, darf ich villeicht folgende Bemerkung machen:

Cayley hatte 1865 (in den Proceedings der London Mathem. Society t I) versucht, den gleichen Satz durch algebraische Betrachtungen zu beweisen, war aber zu einem anderen Resultate gekommen. Clebsch und Gordan bezeichnen daher den Satz in der Vorrede ihrer Abelschen Functionen (1866) als controvers.

Erst Brill und Nöther haben dann 1873 gezeigt. (in der Arbeit: „Ueber die algebraischen Functionen und ihr Auftreten in der Geometrie", die in der Folge noch sehr oft zu nennen ist.), daſs auch bei algebraischer Abzählung die Zahl $3p-3$ herauskommt.

Das war natürlich nicht anders zu erwarten, nachdem in der Zwischenzeit (1870) C. Neumann und

Schwarz ihre Beweismethoden bekannt gemacht hatten, durch welche die sämmtlichen Riemann'schen Sätze (welche Riemann selbst auf das Dirichlet'sche Prinzip gestützt hatte) auf ein sicheres Fundament gegründet worden. Man wird den solcherweise modificirten Riemann'schen Betrachtungen vor der algebraischen Abzählung auch heute noch den Vorrang zuzugestehen müſsen. Denn sie beruhen auf Grundlagen, welche man vollkommen sicher beherrscht (welche überhaupt keine Ausnahme zulaſsen), während die algebraischen Abzählungen, von denen hier die Rede ist, solange sie nicht noch sehr viel ausführlicher durchgearbeitet werden (und das scheint sehr mühsam) alle an einer gewiſsen Unbestimmtheit leiden. Man kann nämlich sofort beliebig viele Beispiele bilden, in denen sie versagen, indem Determinanten verschwinden etc., und nun fehlt der Nachweis, daſs im Allgemeinen, solange keine besonderen Ausnahmefälle vorliegen, Störungen dieser Art nicht auftreten. Unsere Algebraiker laſsen sich da vielfach von einem subjectiven Takte leiten, der gewiſs in den meisten Fällen das Richtige trifft, aber doch kein Aequivalent für einen zuverläſsigen Beweis abgiebt. Man könnte, wenn man streng sein will, sagen, die betr. algebraischen Methoden haben zur Zeit nur einen heuristischen Werth.

Diese Bemerkungen reichen selbstverständlich über die Fragestellung, um die es sich hier handelt, weit hinaus. Aber ich habe sie schon hier einmal in bestimmter Weise berühren wollen, weil sie im weiteren Verlaufe dieser Vorlesung immer mehr in den Vordergrund rücken werden. Ich möchte in der That weiterhin die Aufmerksamkeit immer wieder auf die Frage lenken: Wie viel von den Sätzen die wir auf Riemann'scher Grundlage kennen lernen werden, ist bis jetzt anderweitig bewiesen? Hierüber klar zu werden, ist offenbar von der größten principiellen Wichtigkeit. –

Riemann's Abzählung der Moduln für $p > 1$ ist nun einfach folgende:

1) Die Figur in der w-Ebene hängt „endlich-deutig" von der Lage der $2p-2$ Verzweigungspunkte und dem Betrage der $2p$ Perioden a_α, b_α ab.*) Es

---

*) Das Wort „endlich-deutig" bedarf natürlich der Präcision: Es werden da Untersuchungen ähnlicher Art anzustellen sein, wie sie Hurwitz neuerdings in Ann. 39 über die Bestimmung mehrblättriger geschlossener Flächen

giebt also ∞^{4p-2} derartige Figuren.

2) Jede Figur kann, wie wir schon bemerken, als Fundamentalbereich benutzt werden, d. h. sie definirt eine Riemann'sche Fläche vom Geschlechte p.

3) Auf jeder Riemann'schen Fläche vom Geschlechte p haben wir entsprechend der Formel $w = c_1 j_1 + c_2 j_2 + \dots c_p j_p + C$ ∞^{p+1} überall endliche Integrale.

4) Die verschiedenen Möglichkeiten, eine Riemann'sche Fläche kanonisch zu zerschneiden, bilden nur eine discontinuirliche Mannigfaltigkeit.

5) Daher liefert jede Riemann'sche Fläche vom Geschlechte p ∞^{p+1} unserer Figuren.

6) Daher endlich ist die Zahl der wesentlich unterschiedenen (nicht auf einander conform-eindeutig abbildbaren) Riemann'schen Flächen vom Geschlechte p: $\infty^{4p-2} / \infty^{p+1} = \infty^{3p-3}$. —

---

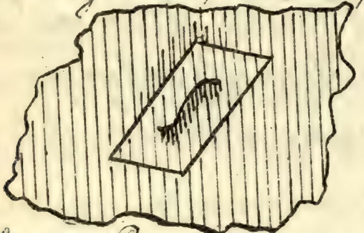
durch ihre Verzweigungspunkte giebt. Diese Untersuchungen sind in die oben formulirte Forderung eingeschlossen, bei unseren Figuren alle möglichen Fälle in concreto festzulegen. So lange diese Untersuchungen nicht durchgeführt sind, wird man Riemann's Abzählung der Moduln vielleicht lieber an den geschlossenen ebenen Flächen vornehmen, worauf wir bald zurückkommen.

Dies die ganze Abzählung. Natürlich ist dieselbe auch bei $p=1$ anwendbar und muſs da nur so modificirt werden, daſs man in der Mannigfaltigkeit der Integrale, welche zu gegebener Riemañ'scher Fläche gehören, insofern jetzt in der Abbildung die Verzweigungspunkte fehlen und also keine Argumente von Verzweigungspunkten in Rechnung zu stellen sind, die additive Constante auszulaſsen ist. Den ∞^2 Figuren treten also ∞^1 auf gegebener Fläche existirende Integrale entgegen, und wir erhalten ∞^1 unterschiedene Flächen, d. h. *einen* Modul, wie es sein soll. –

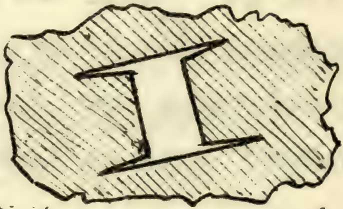
Mi. 25. 11. 91

4. Vom Gesammtverlauf der Integrale zweiter und dritter Gattung auf der zerschnittenen Fläche. Von der analytischen Fortsetzung der erhaltenen Abbildungen.

Wenn wir den Gesammtverlauf des Integrals J_ξ in derselben Weise studiren wollen, wie bislang den Verlauf von w, so genügt die Zerschneidung der A_α, B_α. Denn J ist ja um seine Unstetigkeitsstelle herum nicht etwa vieldeutig. Nur die Abweichung gegen früher wird selbstverständlich eintreten, daſs sich die Abbildung, der Stelle ξ entsprechend, mit einem Blatte durch das Unendliche der $(x+iy)$ Ebene zieht. Dabei werden wir $2p-2+2=2p$ Kreuzungspunkte finden (der allgemeinen Formel entsprechend, derzufolge bei einem Integral mit m algebraischen Unstetigkeitspunkten erster Ordnung und n logarithmischen Unstetigkeitspunkten $2p-2+2m+n$ Kreuzungspunkte vorhanden sind). Hier zwei Figuren, wie sie für $p=1$ auftreten können:



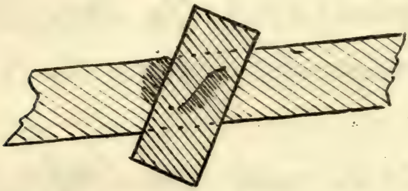
(Kleines Parallelogramm, auf unbegränzte Ebene gelegt)

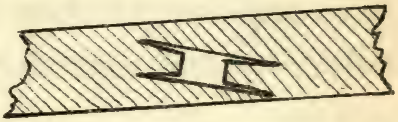


(Fensteröffnung, in unbegränzter Ebene eingeschnitten)

Um aber $P_{\xi\eta}$ in derselben Weise zu untersuchen, werden wir das Schnittnetz der A_α, B_α so vervollständigen müſsen, daſs nach ξ und η je ein Schnitt hinläuft, am einfachsten also so, daſs wir ξ und η durch einen Schnitt verbinden, der den A_α, B_α nicht weiter begegnet. Auf der einen Seite dieses Schnittes ist P um $2i\pi$ gröſser als auf der anderen. Da ferner P in ξ und η mit dem Residuum ± 1 logarithmisch unendlich wird, so wird die Abbildung auf der $(x+iy)$-Ebene zum Theil durch ein unendliches zwischen zwei

Parallelcurven hinlaufendes Band gebildet werden, an welches dann p Parallelogramme von positivem oder negativem Flächeninhalte angefügt sind. Hier wieder zwei Beispiele für $p = 1$:





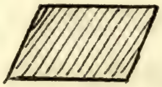
Wir verweilen bei diesen Figuren der Y, P nicht länger, sondern knüpfen an dieselben, wie an die Figuren der w, nur noch einige Folgerungen:

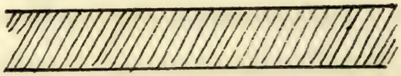
1) Im Falle $p = 0$ ist das Abbild von Y die schlichte $(x + iy)$-Ebene als solche in Uebereinstimmung mit dem Umstande, daſs hier Y algebraisch, d.h. eindeutig auf der Riemann'schen Fläche ist und daſs allgemein eine algebraische Function (wie wir bald sehen werden) auf der Riemann'schen Fläche jeden complexen Werth ebenso oft annimmt, wie den Werth ∞. Hierin liegt, daſs zwei Flächen $p = 0$ unter einander immer gleichwerthig sind, daſs also die Flächen $p = 0$ keinen Modul haben.

2) Allgemein betrachte man jetzt die „analytische Fortsetzung" unserer Abbildungen, d.h. den Inbegriff der Abbildungen, welcher aus der erst con-

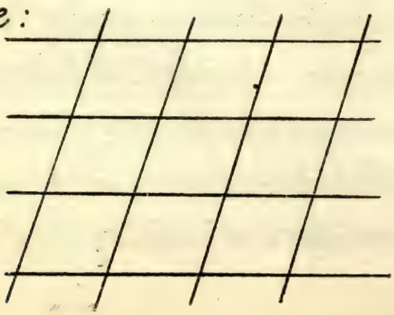
schnitten entsteht, indem wir dem in Betracht kommenden Integrale (w oder J oder P) gestatten, über die Querschnitte hinüber zu wandern. Es ist dies natürlich der Inbegriff der Figuren, welche aus der ursprünglichen durch wiederholte Parallelverschiebungen um die Perioden des Integrals hervorgehen.

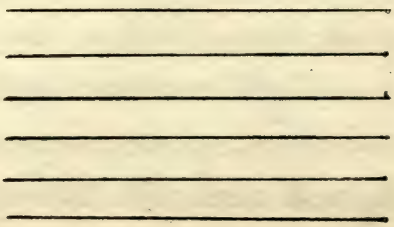
Am einfachsten gestaltet sich die Sache, wenn wir von dem J des Falles $p = 0$ absehen (wo überhaupt von analytischer Fortsetzung nicht die Rede ist) für das w des Falles $p = 1$ und das P für $p = 0$. Wir haben da als Ausgangsfiguren das schlichte Parallelogramm, bez. den schlichten Parallelstreif:





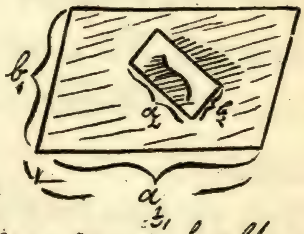
und diese ergeben, wenn man auf sie die zugehörigen Parallelverschiebungen in beliebiger Wiederholung anwendet, nur eine einfache Ueberdeckung der $(x+iy)$-Ebene:





Die $(x+iy)$-Ebene erscheint in aequivalente Parallelogramme, bez. Streifen einfach eingetheilt. Deſshalb wird in diesen Fällen jede auf der ursprünglichen Fläche eindeutige Function auch in $(x+iy)$ eindeutig, das einemal eine doppeltperiodisch, das anderemal eine einfach periodische Function. Wir wollen das Sachverhältniſs kurz bezeichnen, indem wir sagen, die ursprüngliche Riemann'sche Fläche selbst sei in $(x+iy)$ eindeutig doppelt-periodisch bez. einfach periodisch.

Wie aber wird die Sache in den anderen Fällen? Nehmen wir etwa die nebenstehende Figur eines zu $p = 2$ gehörenden w als Ausgangsfigur. Da werden wir im Ganzen vierfach unendlich viele Fortsetzungen erhalten, den Verschiebungen $w' = w + m_1 a_1 + n_1 b_1 + m_2 a_2 + n_2 b_2$ entsprechend, jedesmal zweifach unendlich viele, welche stehenden Werthen der m_2, n_2, oder stehenden Werthen m_1, n_1 entsprechen, mögen wir zusammengefaſst denken. Das eine Mal erfüllen die groſsen Parallelogramme der bez. Figuren eine Ebene, das andere Mal die kleineren. Folgendermaſsen also können wir die Gesammtheit aller analytischer Fort-



setzungen angeordnet denken: Man nehme ∞^2 Ebenen (m_2, n_2), welche man in groſse Parallelgramme eintheile, deren einzelnes man mit (m_1, n_1) bezeichne. Man nehme ferner ∞^2 Ebenen (m_1, n_1) welche man in kleine Parallelogramme eintheile, deren einzelnes man mit (m_2, n_2) bezeichne. Alle diese Ebenen schichte man in geeigneter Weise über einander und befestige dann das „groſse" Parallelogramm (m_1, n_1) der Ebene (m_2, n_2) an das über ihm (oder unter ihm liegende) „kleine" Parallelogramm (m_2, n_2) der Ebene (m_1, n_1) je durch einen Verzweigungsschnitt. Wie werden wir diesen Sachverhalt kurz bezeichnen? Wir werden sagen: die ursprüngliche Riemann'sche Fläche sei in w *vierfach-periodisch, aber vieldeutig*.

Genau so wird sie *zweifach-periodisch und vieldeutig*, wenn wir vom J des Falles $p = 1$, *dreifach periodisch und vieldeutig*, wenn wir vom P des Falles $p = 1$ ausgehen.

Wir haben damit den einfachen Grund, weſshalb es zweckmäſsig ist, im Falle $p = 1$ das eine dort vorhandene überall endliche Integral w als unabhängige Variable einzuführen, nicht aber zweckmäſsig ist, im Falle $p = 2$ eins der zugehörigen Integrale w_1, w_2

in entsprechender Weise zu benutzen. Denn die Analysis sucht überall *eindeutige* Functionen. Nicht daſs man doppeltperiodische Functionen, sondern daſs man eindeutige Functionen von w erhält, ist das Charakteristikum des Falles $p = 1$.

Wir erkennen aber auch, daſs *Jacobi*, der zum ersten Male auf den fundamentalen hier vorliegenden Unterschied aufmerksam macht und durch einen besonders genialen Ansatz daraus die Begriffsbestimmung der Abel'schen Functionen zog (d.h. $2p$-fach periodische Functionen von p complexen Argumenten) - vergl. Crelle 13, (1835): „de functionibus duarum variabilium quadrupliciter periodicis, quibus theoria functionum abelianarum innititur" - daſs Jacobi von dem eigentlichen Wesen des in Betracht kommenden Unterschieds nur erst ein sehr unvollkommenes Verständniſs hatte. Indem er das Wort „Function" ohne es zu sagen, ausschlieſslich auf eindeutige Functionen bezieht, kommt er zu dem Schluſse, daſs eine Function von $(x+iy)$ höchstens zwei Perioden haben könne, und da er andererseits im Falle $p = 2$ bei dem einzelnen zugehörigen w vier Perioden wahrnimmt, so erklärt er, daſs eine Einführung dieses w als unabhängiger Variabelen $(x+iy)$ unstatthaft sei, weil sie zu keiner functionalen Abhängigkeit Anlaſs geben könne! Das eben ist eine der groſsen Leistungen von Riemann, bei der hier vorliegenden Frage durch seine mehrblättrigen Flächen (deren Anschauung natürlich Jacobi völlig abging) Klarheit geschaffen zu haben. Es ist auch schwer einzusehen, wie man ohne mehrblättrige Flächen in die hier vorliegende vierfache Periodicität soll eindringen können. –

Ich habe dies so ausführlich geschildert, weil Jacobis unvollkommene Darstellung des Sachverhalts immer noch vielfach reproducirt wird, z.B. noch 1885 von Fuchs in den Berliner Sitzungsberichten (Ueber den Character der Integrale von Differentialgleichungen zwischen complexen Variabelen). Uebrigens hatte schon Göpel 1847, Crelle 35, in seiner „Theorie transcendentium Abelianarum primi ordinis adumbratio levis" gegen Jacobi's Darstellung Einspruch erhoben, den dieser aber merkwürdigerweise in einer zugefügten Redactionsnote zurückwies. Ausführlich entwickelt den Riemann'schen Standpunkt (ohne freilich Riemann zu nennen, und wahrscheinlich ohne die hier in Betracht kommende Stelle in №. 12 der Abel'schen Functionen zu kennen) Casorati in den Comptes Rendus t. 57 (1863, II) und t 58 (1864, I), ferner neuerdings, an die Publication von Fuchs anknüpfend, in Acta Math. VIII (1886). Auch Weierstraſs hat einige auf diese Dinge bezügliche Bemerkungen gemacht, vergl. die Schluſsbemerkungen, die er auf p.132 seiner Abhandlungen zur Functionenlehre (1886) einem früheren Aufsatze über die Verallgemeinerung des Jacobischen Satzes auf Functionen mehrerer complexer oder reeller Variabler hinzugefügt hat.

So. 28. 11. 91

III. Von den algebraischen Functionen auf der Riemann'schen Fläche.

A. Allgemeine Sätze vorbereitender Art.

Indem wir vorläufig annehmen, es sei uns gelungen, auf der vorgegebenen Riemann'schen Fläche algebraische (d.h. eindeutige) Functionen f herzustellen, bemerken wir vorweg:

1) Jedes f nimmt den Werth 0, oder irgend welchen anderen festen Werth, ebenso oft an, als den Werth ∞.

Man beweist dies am einfachsten, indem man sich die gegebene Riemann'sche Fläche durch die Schnittte A, B, c in eine einfach zusammenhängende verwandelt denkt und nun längs des Randes dieser einfach zusammenhängenden Fläche $\int\frac{df}{f}$ (oder $\int\frac{df}{f-c}$) hinleitet. Hierbei entsteht nothwendigerweise 0, insofern doch f auf der unzerschnittenen Fläche eindeutig ist, jedes Element der Curven A, B, C dabei aber in zweierlei Sinne durchlaufen wird. Die algebraische Summe der Residua, welche log. f, bez. log (f − C) in seinen verschiedenen Unstetigkeitspuncten auf der Fläche darbietet, ist darum stets 0. Das aber ist gerade der zu beweisende Satz, so formulirt, daſs er gleich auch in den Gränzfällen richtig bleibt, wo von den Nullstellen oder Unendlichkeitsstellen von f, bez. f − c, irgend welche zusammenfallen mögen.

Die Anzahl m der Puncte, in denen f diesem Satze zufolge jeden beliebig vorzugebenden Werth C annimmt, nennen wir die Werthigkeit von f.

Offenbar kann dieser Satz von der „Werthigkeit“ als Verallgemeinerung des „Fundamentalsatzes“ der Algebra angesehen werden, der behauptet, daſs eine rationale ganze Function m^{ten} Grades von z jeden endlichen Werth m-mal annimmt. Denn eine solche Function wird auf der bei ihr in Betracht kommenden Fläche (der schlichten z-Ebene) m-mal unendlich; es liegt nur die Vereinfachung vor, daſs sämtliche m Unendlichkeitsstellen derselben bei $z = \infty$ zusammenfallen. –

2. Abbildung durch $f = x + iy$ auf die xy-Ebene.

Wir entwerfen jetzt von unserer gegebenen Riemann'schen Fläche ein Bild über der Ebene, indem wir $f = x + iy$ setzen. Irgend welche Zerschneidung der Riemann'schen Fläche ist dabei nicht vorauszusetzen, weil ja f auf ihr ohnehin eindeutig. Wir erhalten dementsprechend ein *geschloſsenes* Abbild.

Und deſsen Character ist durch den gerade bewiesenen Satz festgelegt: *daſselbe bedeckt die ganze xy-Ebene mit m Blättern*, hat also gerade die Gestalt einer „mehrblättrigen, ebenen" Riemann'schen Fläche, wie man sie der Theorie zumeist ausschlieſslich zu Grunde legt. –

Die Zahl der Verzweigungspunkte, vermöge deren die m Blätter zusammenhängen, kann jetzt auf doppelte Weise bestimmt werden: Entweder direct, indem man die Thatsache berücksichtigt, daſs unsere m-blättrige Fläche dem Geschlechte p angehört. Dann indirect, indem man sich erinnert, daſs ein überall endliches Differential dw auf der R. Fläche $2p-2$ Nullpunkte darbietet, während df

m Unstetigkeitspuncte zweiter Ordnung besitzen wird. Beides zusammen ergiebt die Zahl der Unstetigkeitspuncte von $\frac{df}{dw}$, und nun beachte man, daſs $\frac{df}{dw}$ nothwendig eine algebraische Function ist, daher, dem gerade bewiesenen Satze zufolge, ebenso oft 0 als ∞ wird. – Auf die eine wie auf die andere Weise ergiebt sich als Zahl der Puncte $df = 0$, d.h. der Verzweigungspuncte der m-blättrigen Fläche, $\underline{2m + 2p - 2}$, – in Uebereinstimmung mit der auf p 86 ohne Beweis angegebenen allgemeinen Regel.

3) Algebraische Darstellung auf der m-blättrigen Fläche.

Man kann folgendes zeigen (was wir hier nur erst vorweg anführen):

a) Neben z kann man auf der R Fläche in mannigfachster Weise eine algebraische Function s finden, welche von z „unabhängig" ist, d.h. so beschaffen, daſs zu jedem Werthe von z im Allgemeinen (einzelne Werthe von z ausgenommen) m verschiedene Werthe von s gehören.

b) Zwischen z und einem solchen s besteht eine algebraische Gleichung, die in s bis zum m^{ten} Grade aufsteigt:

$$F(\overset{m}{s}, z) = 0$$

und die man als genaues Gegenbild unserer m blättrigen Fläche auffaſsen kann.

c) Jede andere zur ursprünglichen R. Fläche gehörige algebraische Function s', mag sie von z unabhängig sein oder nicht, wird sich durch s und z rational darstellen laſsen:

$$s' = R(s, z). -$$

Da $m = 1$ zu einfach ist, – alle s' werden in z selbst rational, die s' sind nichts Anderes als die rationalen Functionen von z – so nehme man $m = 2$ als einfachstes Beispiel. Sei $\varphi_{2p+2}(z)$ eine rationale ganze Function von z, welche in den $2p+2$ Verzweigungsstellen der zweiblättrigen Fläche verschwindet, so wird man ein zugehöriges s durch $s^2 = \varphi_{2p+2}(z)$ definiren können.

4) Von dem kleinsten zuläſsigen Werthe von m.

Die Annahme $m = 1$ ist offenbar nur mit $p = 0$ verträglich. Dagegen kann für $m = 2$, sofern wir nur die Zahl der Verzweigungspuncte $(= 2p+2)$ hinreichend hoch wählen, p jeden beliebigen Werth erreichen. Aber man beachte, daſs eine solche zweiblättrige Fläche für $p > 2$ niemals die allgemeine Fläche des betr. p darstellen kann. Die zweiblättrige Fläche hat nämlich nur so viele Constante, als in den

$2p+2$ Verzweigungspuncten stecken, nachdem man drei derselben durch lineare Substitution von z an irgend welche drei vorgegebene Stellen gebracht hat, also $2p-1$. Die allgemeine Fläche hing aber bei $p>1$ von $3p-1$ wesentlichen Constanten ab, für $p=1, 0$ hatten wir als Zahl dieser Constanten $1, 0$. Die Zahl $2p-1$ stimmt daher mit der Zahl der Moduln nur bei $p=0, 1, 2$; höher hinauf ist sie kleiner. Eben darum bezeichnet man den Fall einer R. Fläche, die sich in die zweiblättrige Form setzen läſst, mit einem besonderen Namen; man nennt ihn den *hyperelliptischen* Fall.

Welches ist das kleinste m, welches uns den allgemeinen Fall eines vorgegebenen p liefern kann? Wieder gehen wir davon aus, daſs wir die $2m+2p-2$ Verzweigungspuncte der z-Ebene beliebig annehmen können (denn jede m-blättrige Fläche, die wir über der z Ebene mit $2m+2p-2$ Verzweigungspuncten construiren mögen, ist doch vermöge unseres allgemeinen Existenzsatzes eine Riemann'sche Fläche). Wir überlegen ferner, daſs sich bei gegebenen $2m+2p-2$ Verzweigungs*stellen* der z-Ebene jedenfalls nur eine endliche Zahl m-blättriger Flächen construiren läſst; deren Verzweigungs*puncte* über dem gegebenen Verzweigungsstellen gelegen sind. So kommen wir für diese Flächen auf $2m + 2p - 2$ Constante. Aber 3 Constante müssen wir wieder abziehen, weil man durch lineare Transformation z drei Verzweigungsstellen in beliebig vorgegebenen Lagen hineinbringen kann. So kommen wir für unsere Fläche auf $2m + 2p - 5$ wesentliche Constante. Diese Zahl soll $\geqq$ der Zahl $3p - 3$ der Moduln der allgemeinen Fläche vom Geschlechte p sein. Dies giebt $m \geqq \frac{p+2}{2}$, und als *Minimalwert von m*: $\left[\frac{p+3}{2}\right]$.

Uebrigens soll dies nur eine vorläufige Abzählung sein. Wir werden später noch genauer prüfen müssen, ob die bei ihr benutzte Constantenzählung als berechtigt anzusehen ist. Es kommt das darauf hinaus zu prüfen, ob zwei m-blättrige Flächen vom Geschlechte p über der z-Ebene, deren Verzweigungsstellen nicht auseinander durch lineare Transformation des z hervorgehen, nicht möglicherweise doch durch eindeutige conforme Abbildung in einander verwandelt werden können.

5) Wir berühren hiermit ein wichtiges Problem, welches erst neuerdings von Herrn *Hurwitz* mit Erfolg in Angriff genommen worden ist. (Math Ann. Bd 39, 1891) Gegeben sind die $2m + 2p - 2 = w$ Verzwei-

ungsstellen in der z-Ebene. Wie groſs ist die Zahl der unterschiedenen zugehörigen m-blättrigen Flächen? Hurwitz hat diese Zahl, die eine merkwürdig complicirte Function von m und w zu sein scheint, jedenfalls für die niedersten Werthe von m bestimmt. So findet er für:

	Zahl ψ der unterschieden Flächen
$m = 2$	$\psi = 1$
$m = 3$	$\psi = \frac{1}{3!}\left(3^{w-1} - 3\right)$
$m = 4$	$\psi = \frac{1}{4!}\left(2^{w-2} - 4\right)\left(3^{w-1} - 3\right)$

Er ist dann aber noch zwei Schritte weitergegangen: er hat auch die *Gruppe* des hier vorliegenden Problems ψ^{ten} Grades, und die *Realitätsverhältnisse* des Problems studirt. Wir erhalten die „Gruppe", indem wir die Verzweigungsstellen der z-Ebene von ihren Anfangslagen aus sich irgendwie bewegen laſsen, bis sie schlieſslich wieder die Anfangslage annehmen, und nun zusehen, wie sich hierbei unsere ψ Flächen permutirt haben. Die „Gruppe" ist der Inbegriff aller auf solche Weise entstehenden Vertauschungen der ψ Flächen. Die „Realitätsdiscussion" aber verlangt daſs wir die Verzweigungsstellen der x-Ebene symmetrisch zur x Axe annehmen (also theils reell, theils paarweise conjugirt imaginär) und nun zusehen, welche der ψ-Flächen bei Spiegelung an der x-Axe in sich selbst übergehen, welche andererseits dabei paarweise zusammengeordnet erscheinen.

6. Hier ist es nun intereſsant, auf gewiſse *algebraische* Untersuchungen, die in neuerer Zeit insbesondere von *Kronecker* und seinen Schülern geführt worden sind, einen Seitenblick zu werfen.

Nennen wir die Gesammtheit der algebraischen Functionen s, s' unserer Fläche, welche von z „unabhängig" sind, eine *Claſse* algebraischer Functionen. Für jedes s, s' wird man eine Gleichung n^{ten} Grades haben:

$$F(s^n, z) = 0, \quad F'(s'^n, z) = 0$$

wobei s' in s und s in s' rational ist:

$$s' = R'(s, z), \quad s = R(s', z).$$

Die „Claſse" algebraischer Gleichungen erscheint hier als *Gesammtheit solcher einen Parameter z rational enthaltender algebraischen Gleichungen, welche durch umkehrbare Tschirnhausen-Transfor-*

mation miteinander zusammenhängen. (Die Tschirnhausen-Transformation ist dabei als rational in z vorauszusetzen).

Wie aber werden wir bei vorgelegten zwei Gleichungen

$$F(s,z)=0,\quad F'(s',z)=0$$

entscheiden wollen, ob sie derselben „Classe" angehören? Wir werden uns vor allen Dingen die beiderseitigen *Discriminanten* D und D' bilden. Wie Kronecker zeigt, kann man die einzelne solche Discriminante als rationale ganze Function von z in zwei Factoren zerlegen, deren zweiter nothwendig in gerader Potenz auftritt.

$$D=\Delta_1\cdot\Delta_2^2,$$

wo Δ_1 die Eigenschaft hat, bei beliebiger Tschirnhausentransformation ungeändert zu bleiben, während Δ_2 irgend wechseln kann. Kronecker nennt Δ_1 darum den *wesentlichen*, Δ_2 den *ausserwesentlichen* Theile der Discriminante. *Die Unveränderlichkeit der Δ_1 ruht einfach darin, dass $\Delta_1=0$ die Verzweigungsstellen unserer Riemann'schen Fläche ergiebt.* Die Bedingung aber, welche sich von hier aus dafür ergiebt, dass $F=0$ und $F'=0$ derselben „Classe" angehören sollen, (und die nur erst eine nothwendige, keine ausreichende Bedingung ist), lautet einfach $\Delta_1 = \Delta'_1$: *die Discriminanten D und D' müſsen in ihrem wesentlichen Theiler übereinstimmen.*

So weit laufen also die genannten Untersuchungen unseren Riemann'schen Anschauungen genau parallel. Aber darüber hinaus versagt die algebraische Theorie. Man hat bis jetzt alle die Fragestellungen, welche von Riemann'scher Basis aus durch Hrn. Hurwitz in Angriff genommen sind, von algebraischer Seite noch unberührt gelaſsen. Und doch liegt deren algebraische Bedeutung auf der Hand. Die Bestimmung von ψ z. B. giebt direct die Anzahl unterschiedener „Claſsen" algebraischer Gleichungen, deren Discriminanten einen vorgegebenen wesentlichen Factor Δ_1 enthalten. Man muſs sich natürlich denken, daſs die Trennung dieser verschiedenen Claſsen durch Auflösung einer Gleichung ψ^{ten} Grades zu bewerkstelligen ist. Hurwitz' „Gruppe" giebt dann einfach die Galois'sche Gruppe dieser Gleichung, Hurwitz' Realitätsdiscuſsion der Flächen die Zahl ihrer reellen, bez. complexen Wurzeln. Würde es so schwierig sein, alle diese

Dinge von algebraischer Seite mit rein algebraischen Hülfsmitteln zu behandeln oder behaupten hier die Riemann'schen Methoden einen endgültigen Vorrang?

B. Herstellung algebraischer Functionen.

Mi. 12.12.91.

Der Riemann-Roch'sche Satz.

1) Es giebt zwei Arten der Herstellung, deren jede ihre besonderen Vortheile hat:

a) durch Addition von Normalintegralen zweiter Gattung Y. Seien $\xi_1, \dots \xi_m$ irgend m Punkte der Riemann'schen Fläche, so addirt man $c_1 Y_{\xi_1} + \dots c_2 Y_{\xi_2} + \dots c_m Y_{\xi_m} + C$ und sucht die Constanten $c_1, c_2, \dots$ so zu bestimmen, daſs nicht nur die Periodicitätsmoduln erster Art verschwinden (was wegen der Normirung der Y selbstverständlich ist) sondern auch die Periodicitätsmoduln zweiter Art. Hier ergeben sich also die algebraischen Functionen, indem man die Stellen vorschreibt, an welchen dieselben sollen unendlich werden dürfen. –

b) durch Differentiation von Integralen. Sind J, J' irgend zwei Integrale auf der Riemann'schen Fläche, so wird der Differentialquotient dJ/dJ', oder auch d^2J/dJ'^2 etc. eine algebraische Function sein. – Hier erscheinen als einfachste algebraischen Functionen diejenigen, bei denen J, J' Integrale erster Gattung sind, die sich also in der Gestalt

$$\frac{dw}{dw'} = \frac{\Sigma c_\alpha dj_\alpha}{\Sigma c'_\alpha dj_\alpha}$$

darstellen lassen. Wir werden dieselben weiterhin als *Specialfunctionen* bezeichnen. Die Werthigkeit einer Specialfunction ist natürlich $\leqq 2p-2$, dass sie wirklich bei jeder Riemann'schen Fläche bis zu $2p-2$ aufsteigen kann, werden wir bald zeigen. Als erweiterte Specialfunctionen werden wir dann solche bezeichnen, bei denen im Zähler und Nenner der hingeschriebenen Formel noch je bestimmte weitere dJ mit irgendwelchen Constanten hinzutreten. Beispielsweise sei nur ein solches J vorgegeben und dieses sei ein Normalintegral dritter Gattung $\Pi_{z\vartheta}$. Die zugehörigen „erweiterten Specialfunctionen" werden sich dann so schreiben:

$$\frac{\Sigma c_\alpha dj_\alpha + c\, d\Pi_{z\vartheta}}{\Sigma c'_\alpha dj_\alpha + c'\, d\Pi_{z\vartheta}} = \frac{dP_{z\vartheta}}{dP'_{z\vartheta}}$$

Sie haben offenbar die Besonderheit, an den beiden Stellen z und ϑ je denselben Werth c/c' an, zunehmen. Wir bezeichnen sie dieserhalb als *gebundene* Functionen. Hätte man statt $d\pi_z \vartheta$ das Differential zweiter Gattung dY_z vorgegeben, so hätte sich als Eigenschaft der zugehörigen erweiterten Specialfunction diese ergeben: *an der Stelle z ein verschwindendes Differential zu haben.* Analoge Einschränkungen ergeben sich für die erweiterten Specialfunctionen irgend welcher vorgegebenen Art.

2) An a) der N^{o} 1 anknüpfend beweisen wir nun gleich den Fundamentalsatz von der Zahl der in einer algebraischen Function auftretenden Constanten, den sogenannten *Riemann-Roch'schen Satz* (*Roch* in Crelle 64, 1865). Wenn wir die Unendlichkeitsstellen $\xi_1, \ldots \xi_m$ vorgeben, wie viele der Constanten $c_1, \ldots c_m$, C werden willkürlich angenommen werden dürfen? Nach den früheren Formeln für die Perioden zweiter Art der Normalintegrale Y haben wir, damit überhaupt eine algebraische Function vorliegt, folgende p lineare Gleichungen zu erfüllen:

$$\left| \begin{array}{l} c_1 \frac{dj_1}{d\xi_1} + \ldots\ldots c_m \frac{dj_1}{d\xi_m} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_1 \frac{dj_p}{d\xi_1} + \qquad\quad c_m \frac{dj_p}{d\xi_m} = 0 \end{array} \right.$$

Sind dieselben linear unabhängig, so behalten wir $m+1-p$ Constanten, die willkürlich bleiben; aber es ist auszuschlieſsen, daſs dieselben in besonderen Fällen linear abhängig werden.

Es wird dann für die p Gleichungen ein System von Multiplicatoren $u_1 \dots u_p$ geben, so daſs $u_1 \cdot$ (linke Seite der ersten Gleichung) $+ \dots u_p \cdot$ (linke Seite der p^{ten} Gleichung) identisch Null. Um ganz allgemein zu sein, werden wir annehmen, es gäbe *σ linear-unabhängige Systeme derartiger Multiplicatoren.* Dann steigt die Zahl der willkürlichen Constanten in unserer algebraischen Function auf $m+1-p+\sigma$. Was bedeutet das für die Lage der Punkte $\xi_1, \dots \xi_m$? Jedes einzelne Multiplicatorsystem besagt, daſs folgende Gleichungen bestehen sollen:

$$u_1 \frac{dj_1}{d\xi} + u_2 \frac{dj_2}{d\xi_1} + \dots + u_p \frac{dj_p}{d\xi_1} = 0$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$u_1 \frac{dj_1}{d\xi_m} + u_2 \frac{dj_2}{d\xi_m} + \dots + u_p \frac{dj_p}{d\xi_m} = 0$$

Das aber heiſst, daſs das Differential erster Gattung

$$dw = u_1 dj_1 + u_2 dj_2 + \dots u_p dj_p$$

aus den Stellen $\xi_1, \dots \xi_m$ simultan verschwinden soll. *Die Zahl σ daher*, welche wir weiterhin wohl als den *Ueberschuſs* des Punctsystems der $\xi_1, \dots \xi_m$ bezeichnen werden, *stellt die Zahl der linear unabhängigen Differentiale erster Gattung dw vor, welche in $\xi_1, \dots \xi_m$ gleichzeitig verschwinden.* σ ist natürlich immer $= 0$, sobald $m > 2p-2$. Daſs die Zahl der unabhängigen Constanten in unserer algebraischen Function bei dieser Definition von σ in allen Fällen gleich $m+1-p+\sigma$ ist, das ist der Riemann-Roch'sche Satz. Brill und Nöther, welche von diesem Theorem mannigfachste Anwendung gemacht haben, bezeichnen allerdings in ihrer Arbeit in Annalen 7, (1873): „Ueber die algebraischen Functionen etc. mit diesem Namen eine weitere Folgerung, die wir sofort besprechen werden; da diese Folgerung in allgemeiner Form aber erst l.c. von Brill und Nöther selbst entwickelt ist, scheint es richtiger, sie mit ihrem Namen in Verbindung zu bringen.

3) Der Brill-Nöther'sche Reciprocitätssatz. Der Umfang der Specialfunctionen.

Seien $dw_0, dw_1, \dots dw_{\sigma-1}$ σ linear unabhängige überall endliche Differentiale, welche in

$\xi_1, \xi_2, \dots \xi_m$ gleich null sind. Möge ferner dw noch in n weiteren Punkten $\eta_1 \dots \eta_n$ verschwinden, wobei natürlich $m + n = 2p - 2$ ist. Endlich sei τ der zu $\eta_1 \dots \eta_n$ gehörige Ueberschuſs. Der Brill-Nöther'sche Reciprocitätssatz giebt dann eine Relation zwischen den Zahlen m, n, σ, τ.

Man überlege folgendes: Die Function $\frac{c\,dw + c_1\,dw_1 + \dots c_{\sigma-1}\,dw_{\sigma-1}}{dw}$, welche σ linear unabhängige Constante enthält, wird nur in den Punkten η unendlich. Andererseits kann die allgemeinste algebraische Function, die nur in den η unendlich wird, nach dem Riemann-Roch'schen Satze nicht mehr als $n + 1 - p + \tau$ Constanten enthalten. Daher folgt:

$$\sigma \leqq n + 1 - p + \tau.$$

Aber da die Punkte η und die Punkte ξ sich wechselseitig bedingen, folgt ebensowohl:

$$\tau \leqq m + 1 - p + \sigma.$$

Jetzt addiren wir diese beiden Ungleichungen und finden, wegen $m + n = 2p - 2$:

$$\sigma + \tau \leqq \sigma + \tau.$$

Dies zeigt, daſs beidemal das Gleichheitszeichen richtig sein muſs. Wir haben also:

$$\sigma = n + 1 - p + \tau, \quad \tau = m + 1 - p + \sigma,$$

$$2(\sigma - \tau) = (n - m).$$

Dies ist der Brill-Nöther'sche Reciprocitätssatz. – Aus ihm folgern wir sofort, daſs die eben hergestellte Function $\frac{c\,dw + c_1\,dw_1 + \dots c_{\sigma-1}\,dw_{\sigma-1}}{dw}$ die allgemeinste algebraische Function ist, die nur in den Punkten η unendlich wird. Aber das System der Punkte η ist schlieſslich irgend ein Punktsystem, deſsen Ueberschuſs > 0 ist. Daher: *Sobald für irgend ein Punktsystem auf der Riemann'schen Fläche der Ueberschuſs > 0 ist, sind die zugehörigen algebraischen Functionen Specialfunctionen.*

4) Uebertragung der gefundenen Sätze auf gebundene Functionen.

Die Entwickelungen zu 2) und 3) laſsen sich leicht auf irgend welche Art gebundener Functionen verallgemeinern. Bleiben wir bei der einfachsten Art der Gebundenheit, indem wir verlangen, daſs unsere Functionen an der Stelle ζ immer denselben Werth annehmen sollen, wie an der Stelle ϑ. Dann wird zu den p linearen Gleichungen p 106 unten noch die folgende zutreten:

$$c_1 \gamma^{\xi\,\vartheta}_{\alpha\,\zeta} + c_2\,\gamma^{\xi\,\vartheta}_{\alpha\,\xi_2} + \dots c_m\,\gamma^{\xi\,\vartheta}_{\alpha\,\xi_m} = 0.$$

Aber wir hatten früher den Satz von der Vertauschung von Parameter und Argument: $\Pi_{z\vartheta}^{\xi\eta} = \Pi_{\xi\eta}^{z\vartheta}$. Wir folgern daraus, indem wir nach ξ differentiiren: $\frac{d\Pi_{z\vartheta}}{d\xi} = \gamma_{\xi}^{z\vartheta}$. Daher läßt sich unsere $(p+1)$te Gleichung auch so schreiben:

$$c_1 \frac{d\Pi_{z\vartheta}}{d\xi_1} + \dots \; c_m \frac{d\Pi_{z\vartheta}}{d\xi_m} = 0.$$

Die Sache verhält sich also genau so, als wäre p auf $p+1$ gewachsen und den p Normalintegralen erster Gattung $j_1 \dots j_p$ als $(p+1)$tes Integral $\Pi_{z\vartheta}$ hinzugetreten.

Die weitere Betrachtung verläuft nun genau so, wie vorhin: Wir bekommen zunächst den „verallgemeinerten" Riemann-Roch'schen Satz:

Die Anzahl der Constanten in der gebundenen Function ist $m - p + \sigma'$; unter σ' die Zahl der linear unabhängigen Differentiale $dP_{z\vartheta}$ verstanden, welche in den vorgegebenen Punctionen $\xi_1 \dots \xi_m$ verschwinden.

Wir erhalten ferner einen „verallgemeinerten" Reciprocitätssatz und das Theorem, daß jede Function, die in Puncten $\xi_1 \dots \xi_m$ unendlich wird, deren Ueberschuß $\sigma' > 0$, eine „Specialfunction" in erweitertem Sinne" ist

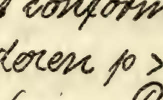
So. 5. 12. 91. Die Form dieser Sätze ist keine zufällige, sondern hat eine tiefergehende Bedeutung. Dieselbe entspricht nämlich dem Umstande, *dass man unsere Riemann'sche Fläche vom Geschlechte p als Gränzlage einer solchen vom Geschlechte $p+1$ ansehen kann*, so zwar, dass beim Gränzübergang die überall endlichen Integrale $j_1 \dots j_{p+1}$ der Fläche vom Geschlechte $p+1$ einerseits die überall endlichen Integrale $j_1 \dots j_p$ der Fläche vom Geschlechte p, andererseits das zu ihr gehörige Integral $\Pi_{\zeta\vartheta}$ liefern, wobei denn die „freien" algebraischen Functionen der Fläche vom Geschlechte $p+1$ in die „gebundenen" algebraischen Functionen der Fläche vom Geschlechte p übergehen.

Man hat, um diesen Uebergang zu bewerkstelligen, nur etwa so zu verfahren. Sei z' eine „gebundene" algebraische Function auf der Fläche vom Geschlechte p, so bilde man durch diese die Fläche auf eine n'-blättrige ebene Fläche ab, bei der die Stellen ζ. ϑ natürlich übereinander liegen werden. Jetzt gehe man in der Weise zu einer Fläche vom Geschlechte $p+1$ über, dass man die beiden Blätter der letzgenannten Fläche, welche die Stellen z und $\mathfrak{z}$ tragen, durch einen ganz kurzen, in der Nähe von z, bez. $\mathfrak{z}$ verlaufenden Verzweigungschnitt verbinde. – Es mag genügen, die Idee eines solchen Gränzüberganges hier vorläufig einmal berührt zu haben; wir werden später auf dieselbe noch wiederholt und ausführlich zurückkommen.

5) Folgerungen aus dem Riemann-Roch'schen Satz: Endgültige Bestimmung der Zahl der Moduln.

Unsere neue Bestimmung der Zahl der Moduln soll sich von der früheren dadurch unterscheiden, daſs wir jetzt die Abbildung der Riemann'schen Fläche benutzen, wie sie durch eine algebraische Function z zu Stande kommt, was doch wohl übersichtlicher ist, als die früher betrachtete Abbildung durch das Integral w, – vor allen aber dadurch, daſs wir vorab eine principielle Frage erledigen. Ist es möglich, daſs eine Riemann'sche Fläche durch eine *continuirliche* Gruppe von ∞^ρ Transformationen in sich übergeht? Man findet, *daſs dies bei $p = 0$ und $p = 1$ stets statt hat, wo dann ρ den Werth 3 bez. 1 besitzt*, daſs aber für $p > 1$ ρ

immer Null sein muſs. Man vergleiche hiezu die analytischen Beweise, die *Schwarz* in Crelle's Journal 87 (1879), *Hettner* in den Göttinger Nachrichten von 1880, *Nöther* in den Annalen 20, 21 (1883) gegeben haben, namentlich aber auch die geometrischen Ueberlegungen, die ich in dieser Hinsicht auf p. 68 meiner Schrift über Riemann entwickele. Daſs für $p > 1$ ρ immer $= 0$ sein muſs, stütze ich da auf folgende Ueberlegung: Wäre $\rho > 0$, so wäre es möglich, die Riemann'sche Fläche über sich selbst hin derart eindeutig zu verschieben, daſs jedes Element der Fläche fortgesetzt mit sich selbst conform bliebe. Aber man kann eine Fläche, deren $p > 1$, nicht anders mit einem Curvensystem (von Bahncurven) eindeutig überdecken, als so, daſs man in dieses Curvensystem eine Anzahl von Kreuzungspunkten einfügt. In einem solchen Kreuzungspunkte müſste die Geschwindigkeit der Verschiebung jedenfalls 0 sein, weil anderenfalls um den Kreuzungspunkt herum keine Eindeutigkeit der Verschiebung herrschen könnte:



Aber dann kann die Umgebung des Kreuzungspunktes bei der Verschiebung unmöglich mit sich selbst conform bleiben!

Die Abzählung der Moduln gestaltet sich nun so:

a) Man nehme die Werthigkeit der algebraischen Function z so groſs, daſs der „Ueberschuſs“ des Riemann-Roch'schen Satzes jedenfalls 0 ist, also $m > 2p-2$.

b) Sofern man die m Unendlichkeitspuncte eines derartigen z vorgiebt, existiren noch ∞^{m+1-p} derartige Functionen. Läſst man die Unendlichkeitspuncte selber beweglich, so werden es ∞^{2m+1-p}.

Wir können also unsere Fläche auf ∞^{2m+1-p} Weisen in eine m-blättrige Fläche über der Ebene verwandeln.

c) Aber dabei entstehen, wenn unsere Fläche ∞^{ϱ} Transformationen in sich selbst zuläſst, natürlich nur $\infty^{2m+1-p-\varrho}$ unterschiedene m-blättrige Flächen.

d) Andererseits wird unsere m-blättrige Fläche, damit sie dem Geschlechte p angehören kann, $2m+2p-2$ Verzweigungspuncte tragen müſsen. Auch lernten wir inzwischen explicite, daſs bei gegebenen $2m+2p-2$ Verzweigungsstellen

der z-Ebene nur eine endliche Zahl m-blättrige Flächen des Geschlechtes p existirt, deren Verzweigungspunkte über diesen Stellen liegen.
Die Zahl der verschiedenen Flächen (m, p) ist also sicher $\infty^{2m+2p-2}$.

e) Hiernach wird die Zahl der wesentlich verschiedenen Riemann'schen Flächen des Geschlechtes p, d.h. derjenigen, die nicht conform aufeinander abgebildet werden können:
$\infty^{2m+2p-2} : \infty^{2m+1-p-\varrho}$, d.h. $\infty^{3p-3+\varrho}$.

f) Die so gefundene Zahl $3p-3+\varrho$ der Moduln stimmt nun in allen Fällen, d.h. auch, wenn $p = 0$ oder 1 ist. —

Aber wir können diese Abzählung noch mit einer weitergehenden Erläuterung begleiten. Lüroth (Ann. 4, 1871) und Clebsch (Ann. 6, 1873) haben gezeigt, daſs jede Fläche mit m Blättern und w Verzweigungspunkten, die wir über der Ebene construiren mögen, in jede andere Fläche (m, w) continuirlich (durch Wandernlaſsen der Verzweigungspunkte) übergeführt werden kann.*/

---

*/ d.h. man kann diesen Satz aus den Entwickelungen von Lüroth und Clebsch ablesen; vergl. meine Schrift über Riemann, p. 66.

Anders ausgesprochen: Die Gleichung ψ^{ten} Grades, welche bei gegebenen Verzweigungsstellen die zugehörigen m-blättrigen Riemann'schen Flächen bestimmt, ist irreducibel. Für uns hier hat das die Bedeutung:

Die $(3p-3+\rho)$ fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit der Gebilde vom Geschlechte p besteht aus einem einzigen zusammenhängenden Stücke.

Hat also irgend ein specielles Gebilde vom Geschlechte p besondere Eigenschaften, so müſsen sich diese immer aus den allgemeinen Eigenschaften, welche übrigens bei den Gebilden vom Geschlechte p auftreten, durch Gränzübergang ableiten laſsen.

6) Weitere Folgerungen aus dem Riemann-Roch'schen Satze: die Werthigkeit der Specialfunctionen.

Bemerken wir vorab dieses: wenn wir in dem Ausdrucke

$$c_1 \gamma_{\xi_1} + \dots c_m \gamma_{\xi_m} + C$$

die $c_1 \dots c_m$ so bestimmen, daſs eine algebraische Function vorliegt, so können dabei einige der c_i gerne Null werden. *Dann ist also die Werthigkeit der gewonnenen algebraischen Function $< m$; es scheiden einige der Punkte $\xi_1, \dots \xi_m$ von selbst aus* *der Reihe der Unendlichkeitspunkte aus.* So ist es zum B., um das trivialste Beispiel zu nennen, wenn (für $p > 0$) $m = 1$ ist. Wir haben dann einen Ueberſchuſs $\sigma = p - 1$, also nach dem Riemann-Roch'schen Satze $1 + 1 - p + p - 1 = 1$ willkürliche Constante in der zugehörigen Function. Diese Function ist einfach die additive Constante selbst; sie hat die Werthigkeit 0 und gar keinen Unendlichkeitspunkt! Ueberhaupt aber werden wir sagen: Wenn wir unsere m Punkte (mit dem Ueberſchuſse σ) so in $(m' + m'')$ Punkte zerlegen können, daſs zu den m' Punkten der Ueberſchuſs $\sigma' = \sigma + m''$ gehört, so also, daſs der Riemann-Roch'sche Satz für die m und die m' Punkte die gleiche Constantenzahl $m + 1 - p + \sigma$ ergiebt, so scheiden die m'' Punkte aus der Reihe der effectiven Unendlichkeitspunkte von selber aus.

Diesen Bemerkungen gegenüber muſs ausdrücklich bewiesen werden, *daſs die Werthigkeit einer Specialfunction $\frac{dw'}{dw}$ bis auf $2p - 2$ aufsteigen kann.* Man erkennt dies so: Wäre es nicht der Fall, so müſsten alle dw irgendwelche Zahl n von Verschwindungsstellen gemein haben. Für den einzelnen solchen Punkt wäre der Ueberſchuſs $\sigma = p$, die

Zahl des Riemann-Roch'schen Satzes = 2: man hätte eine algebraische Function $c_1 V_{\xi_1}^{z} + C'$ (mit willkürlichen c_1, C), welche nur einwerthig wäre, was mit der Annahme $p > 1$ unverträglich ist. —

Besonders lehrreich sind ferner die Verhältnisse *des hyperelliptischen Falles.* Legen wir zur Discussion desselben gleich die zweiblättrige Fläche über der z-Ebene zu Grunde und wählen wie früher

$$s = \sqrt{f_{2p+2}(z)}$$

so lassen sich p zugehörige linear unabhängige überall endliche Integrale in der Form auswählen:

$$w_1 = \int \frac{dz}{s},\ w_2 = \int \frac{z\,dz}{s},\ \dots\ w_p = \int \frac{z^{p-1}\,dz}{s}.$$

Das allgemeinste Punctsystem der zweiblättrigen Fläche, welches durch $dw = 0$ vorgestellt werden kann, wird hiernach durch eine Gleichung folgender Form gegeben sein

$$c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots c_{p-1} z^{p-1} = 0.$$

Dasselbe besteht also aus denjenigen $2p-2$ Puncten der Fläche, welche an irgend $p-1$ Stellen der z-Ebene in den beiden Blättern über einander liegen. Von hier aus untersuche man nun den „Ueberschuss", welchen irgend m Puncte der zweiblättrigen Fläche je nach ihrer Lage darbieten können, und bestimme die „Werthigkeit" der zugehörigen algebraischen Functionen!

7). Von den verschiedenen Normalflächen über der z-Ebene, welche man als einfachste Formen der Gebilde irgend welchen Geschlechtes in Vorschlag gebracht hat.

Für $p = 0$ haben wir natürlich die einblättrige Fläche, für $p = 1$ die zweiblättrige, mit deren Betrachtung man die Theorie der elliptischen Functionen gewöhnlich beginnt (vergl. k. I, 1 der Modulfunctionen). Daß man für $p > 0$, sofern der hyperelliptische Fall vorliegt, jedenfalls die zweiblättrige Fläche wählen wird, ist selbstverständlich. Die Frage ist, wie man diese Normalfläche des hyperelliptischen Falles für die anderen Fälle eines beliebigen p verallgemeinern soll? Man hat diese Verallgemeinerung nach drei Richtungen gemacht:

i: 8. 12. 91. a) In Band 9 der Annali di Matematica, ser. 2, 1879 macht Christoffel den Vorschlag, in jedem Falle die mindestblättrige Fläche zu wählen, die hergestellt werden kann. Wir haben früher schon vorläufig abgezählt, daß immer eine Fläche hergestellt werden kann, deren Blätterzahl > 2 aber $\leqq \left[\frac{p+3}{2}\right]$ ist. Demnach werden wir $\left[\frac{p+1}{2}\right]$ Arten von Gebilden des Geschlechtes p unterscheiden, z. B. $p = 3$ Gebilde, welche sich durch zweiblättrige, und solche, welche sich durch dreiblättrige Flächen vorstellen laſsen etc. –

b) Weierstraſs bevorzugt in seinen Vorlesungen (über Abel'schen Functionen) diejenige mindestblättrige Fläche, welche bei $z = \infty$ nur einen Punct besitzt, d. h. deren sämmtliche m Blätter bei $z = \infty$ in einem $(m-1)$ fachen Verzweigungspuncte zusammenhängen. Es wird dies dadurch bedingt, daſs W. alle vorkommenden Functionen in Reihen zu entwickeln pflegt, die in der Umgebung von $z = \infty$ convergiren: hat man bei $z = \infty$ nur einen einzigen Punct der Riemann'schen Fläche in Betracht zu ziehen, so ist das dafür natürlich eine wesentliche Vereinfachung. Die Blätterzahl dieser mindestblättrigen Flächen kann, jenachdem, $2, 3, \ldots p$ betragen. Vergleiche Schottky in Crelle 83, p 317 ff. (1877). Valentin (Berliner Dissertation 1879), Nöther in Crelle 92 und 97 (1882–84); vergl. auch Heft I meiner Vorlesungen über Abel'sche Functionen (Sommer 1888).

c) Ich selbst habe in Heft II meiner Abel' schen Functionen (Winter 88-89), sowie in Annalen 36 (1889) eine Normalform der mehrblättrigen Fläche in Vorschlag gebracht, welche ich als *kanonische* Fläche bezeichne. Um zu erklären, worin deren Eigenthümlichkeit besteht, muſs ich einige Definitionen, die sogleich ohnehin wichtig werden, vorausschicken:

Unter den algebraischen Functionen einer über der z-Ebene ausgebreiteten Fläche bezeichnet man diejenigen insbesondere als *ganze* Functionen, welche nirgends sonst, als in den Punkten $z = \infty$ unendlich werden. Sei $G(z)$ eine solche Function und ihr Unendlichwerden in den verschiedenen $z = \infty$ entsprechenden Punkten durch $z^{\nu_1}, z^{\nu_2}, \ldots$ etc. gemeſsen. Sei ferner ν die kleinste ganze Zahl, welche $\geqq \nu_1, \nu_2, \ldots$ ist. Ich setze dann homogen machend $z = z_1/z_2$ und bilde das Product:

$$z_2^{\nu} \cdot G(z) = T_{\nu}(z_1, z_2),$$

welches ich als eine zur Riemann'schen Fläche gehörige *algebraische Form* vom Grade ν bezeichne. Augenscheinlich hat T_{ν} keine Unendlichkeitspunkte mehr. Was die Zahl ihrer Nullpunkte angeht, die ich als *Werthigkeit* der Form bezeichne, so beträgt dieselbe $m\nu$. In der That ergiebt sich diese

Zahl, wenn man $I_\nu(z_1, z_2)$ gleich einer *rationalen* ganzen Form ν*ten* Grades $g_\nu(z_1, z_2)$ setzt. Sie folgt daraufhin allgemein, wenn man den Quotienten I_ν / g_ν bildet, der eine algebraische Function der Riemann'schen Fläche vorstellt und deſshalb ebenso viele Nullpunkte als Unendlichkeitspunkte darbieten muſs. — Man beachte übrigens, daſs die hiermit gewonnene Definition der ganzen algebraischen Form nur der Bequemlichkeit halber an die Begriffsbestimmung der ganzen algebraischen Function angeschloſsen wurde, daſs in Wirklichkeit bei ihr jede Bevorzugung des Punktes $z = \infty$ wegfällt.

Hierauf definire ich nun so: *ich nenne eine m-blättrige über der z-Ebene ausgebreitete Fläche kanonisch, wenn ihre $2m + 2p - 2$ Verzweigungspunkte die Nullpunkte einer sonst nirgends verschwindenden ganzen algebraischen Form Σ sind.* So ist es ja in der That bei der hyperelliptischen Fläche $s = \sqrt{f_{2p+2}(z)}$; man hat bei ihr Σ einfach gleich $\sqrt{f_{2p+2}(z_1 z_2)}$ zu setzen. Der Grad von Σ ist hier der $(p+1)$*te*.

Man erhält sofort eine Reihe von Sätzen, durch welche die Begriffsbestimmung der kanomischen Fläche näher festgelegt wird, und aus denen insbesondere folgt, daſs jedes algebraische Gebilde in Gestalt einer kanonischen Fläche gesetzt werden kann.

Zunächst: Sei $(\delta + 2)$ der Grad von Σ. Da Σ nirgends sonst als in den $2m + 2p - 2$ Verzweigungspunkten verschwinden soll, folgt $m(\delta+2) = 2m + 2p - 2$, d. h. $m\delta = 2p - 2$. Die Blätterzahl m der kanonischen Fläche muſs also, wenn sie nicht $= 2p - 2$ ist (was man als den allgemeinen Fall anzusehen hat), ein Theiler von $2p - 2$ sein.

Ferner: Wir bilden uns die Integrale $w = \int \frac{x_1^\delta (x\,dx)}{\Sigma}$, $w' = \int \frac{x_2^\delta (x\,dx)}{\Sigma'}$, die sich sofort als Integrale erster Gattung zu erkennen geben. Wir haben daraufhin: $(x_1/x_2)^\delta = dw : dw'$. Die δ^{te} Potenz von x ist eine Specialfunction von der Werthigkeit $2p - 2$.

Umgekehrt aber: Sei $x^\delta = dw : dw'$ eine Specialfunction von der Werthigkeit $2p - 2$. Wir können ein solches x jedenfalls bilden, sofern wir $\delta = 1$ nehmen; ob es für andere Werthe von δ auch noch zugehörige x giebt, bleibe dahingestellt; in der That wird ja, wenn $dw : dw'$ eine Specialfunction von der Werthigkeit $2p - 2$ ist im Allgemeinen keine aus derselben gezogene Wurzel auch noch eine auf der Riemann'schen Fläche eindeutige Function sein können. Wir bilden dann $\frac{dz}{dw}$. Es ist dies eine algebraische Function der Fläche, welche in sämmtlichen $\frac{2p-2}{\delta}$ Punkten $z=\infty$ gleichförmig unendlich wird, überall sonst aber endlich bleibt. In den $\frac{(2p-2)(\delta+2)}{\delta}$ Punkten $dz=0$ wird sie einfach zu Null. Wir schliessen, dass sie in jedem Punkte $z=\infty$ $(\delta+2)$-fach unendlich wird. Daher wird $\Sigma_i = x_2^{\delta+2}\frac{dz}{dw}$ eine algebraische Form sein, die nur in den Punkten $dz=0$, d. h. in den Verzweigungspunkten der über der z-Ebene ausgebreiteten Fläche verschwindet. Mit anderen Worten: die über der z-Ebene ausgebreitete Fläche ist kanonisch. Die Bedingung, dass z^{δ} gleich einer Specialfunction von der Werthigkeit $2p-2$ sein soll, ist also für den kanonischen Character der Fläche nicht nur nothwendig, sondern auch ausreichend. –

Der Vorzug der hiermit gewonnenen kanonischen Flächen ist nun der, dass auf ihnen die Integrale erster, zweiter und dritter Gattung etc. eine besonders einfache Darstellung finden; doch kann das Nähere hierüber erst weiter unten angegeben werden.

8) Schlußbemerkung. Unsere weitere Absicht wird nun sein, die jetzt in ihren Grundzügen festgelegte Riemann'sche Theorie der eindimensionalen algebraischen Gebilde mit den Entwickelungen einerseits der Algebraisten und Arithmetiker, andererseits der Geometer in Verbindung zu setzen, wie wir schon in der Einleitung sagten. Die Entwickelungen der Geometer werden den größten Theil unseres Interesses in Anspruch nehmen; doch wollen wir hierauf erst nach Weihnachten eingehen, wo ich dann zuerst einen längeren Excurs über die Theorie der algebraischen Curven bringen muß. Einstweilen besprechen wir ausschließlich diejenigen, in neuester Zeit insbesondere von arithmetischer Seite ausgehenden algebraischen Entwickelungen, welche unmittelbar an eine m-blättrig über der z-Ebene ausgebreitete Riemann'sche Fläche anknüpfen. Hierüber gehören, um nur einiges zu nennen:

1) die bez. Entwickelungen in Weierstraß' Vorlesungen über Abel'sche Functionen (Lesezimmer);

2) Ausgedehnte Entwickelungen von Christoffel, von denen aber nur Einiges publicirt ist (Annali

di Matematica ser. 2, X, 1880: Algebraischer Beweis des Satzes von der Anzahl der linear unabhängigen Integrale erster Gattung);

ferner von arithmetischer Seite:

3) *Kronecker* in Bd. 91 des Journals f. M. (1881) Ueber die Discriminante der algebraischen Functionen einer Variabelen,
und die umfaſsende Abhandlung deſselben in Bd. 92 des Journals (1882): Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Gröſsen;

4) *Dedekind* und *Weber* in einer bemerkenswerthen Abhandlung in Bd. 92 des Journals (1882): Theorie der algebraischen Functionen einer Veränderlichen; man vergleiche, was die Beziehung zu den Kr. Untersuchungen anlangt, die Einleitung der Kr. Abhandlung in Bd. 91.

Insbesondere will ich noch auf eine ganz neue Arbeit von *Hensel* aufmerksam machen (Journal Bd. 109, 1891), in welcher der Verf. daſselbe Mittel des Homogenmachens und der algebraischen Formen benutzt, welches wir eben besprachen, und sich übrigens das Ziel setzt, die einzelnen zu besprechenden analytischen Prozeſse jeweils auf eine endliche Zahl ausführbarer Operationen zurückzuführen.

Indem wir zu diesen verschieden Entwickelungen in dem folgenden Kapitel Stellung nehmen, haben wir den grossen Vorzug voraus, dass uns die Existenz und Zahl der auf der Riemann'schen Fläche vorhandenen algebraischen Functionen und Integrale von vorneherein bekannt ist und wir nur noch nach der *algebraischen Darstellung* derselben zu fragen brauchen. Die genannten Autoren dagegen sehen sich vor der doppelten Aufgabe, einmal diese algebraische Darstellung zu leisten, andererseits von ihr ausgehend zu den Sätzen über die Existenz und die Zahl der Functionen zu gelangen. Daher hat ihre Entwickelung, sofern sie sich nicht auf Riemann'sche Flächen mit getrennten Verzweigungspunkten oder sonstige einfache Fälle beschränkt, etwas sehr Mühsames und Abstractes.

Sa. 12. 12. 91.

IV. Algebraische Darstellung auf der m-blättrig über der z-Ebene ausgebreiteten Riemann'schen Fläche.

A. *Vorbemerkung.* Wir werden in der Folge vielfach von der *Sprechweise der analytischen Geometrie* Gebrauch machen, welche neben *reellen* Punkten (s,z) einer Ebene auch imaginäre „Punkte" der Ebene kennt, so daſs die „Curve" f(s,z) = 0 nicht nur der Inbegriff der reellen Werthepaare (s,z), sondern auch der Inbegriff der complexen Werthepaare (s,z) ist. Diese Sprechweise ist zur Bezeichnung gewiſser Vorkommniſse so expedit, daſs es pedantisch wäre, sie vermeiden zu wollen.

Aber es bringt ihre Verwendung allerdings zweierlei Miſsstände mit sich: einmal den, daſs sie die Aufmerksamkeit von den gestaltlichen Verhältniſsen, welche eine Curve f(s,z) = 0 im Reellen darbietet, unwillkürlich ablenkt, dann aber, daſs es geradezu schwer wird, wenn man sich an die allgemeinere analytische Bedeutung der Ausdrücke Curve, Punkt etc. gewöhnt hat, die im Reellen stattfindenden Verhältniſse sprachlich zu bezeichnen. Immer vermindern wir diesen Uebelstand, indem wir sein Vorhandensein ausdrücklich constatiren.

Von dieser „Curve" f(s,z) = 0 werden wir nun im folgenden wiederholt voraussetzen, daſs sie allgemein sei. Es soll dies einmal heiſsen, daſs die Curve im Endlichen nirgendwo andere singuläre Punkte als „Doppelpunkte" besitzt, d.h. Stellen (s, z), für welche zwar $\frac{\partial f}{\partial s}$ und $\frac{\partial f}{\partial z}$ gleichzeitig $= 0$, nicht aber noch höhere Differentialquotienten oder Verbindungen von solchen verschwinden. Es soll dies andererseits heiſsen: daſs die Curve gegen die z-Axe „allgemeine Lage" habe. Wenn wir bei unserer Discuſsion, wie wir das doch im vorliegenden Kapitel thun wollen, das z vor dem s also „unabhängige" Variablen auszeichnen, so heiſst das für die analytisch geometrische Betrachtung so viel, daſs wir weniger die Curve als solche, als vielmehr ihre Projection auf die z-Axe auffaſsen. „Allgemeine Lage" wird dabei vorhanden sein, wenn die Curvenpunkte, welche bei dieser Projection eine besondere Rolle spielen, nämlich die „Curvenpunkte mit verticaler Tangente" keine besondere Lage haben. Keiner dieser Punkte soll ∞ weit liegen oder in einen der Doppelpunkte der Curve hineinfallen. Niemals sollen zwei vertical übereinander liegen. Keiner derselben soll ein Wendepunkt sein. — Uebrigens sind die in Rede stehenden Punkte analytisch dadurch characterisirt, daſs in ihnen zwar $\frac{\partial f}{\partial s}$ verschwindet, nicht aber $\frac{\partial f}{\partial z}$.

Der hiermit geschilderte „allgemeine" Fall einer Curve $f(s,z) = 0$ wird uns im Folgenden wohlverstanden niemals zum Beweise allgemeiner Theoreme dienen, sondern nur zur Veranschaulichung: er giebt uns ein Beispiel, an dem wir unsere Ideen besonders bequem ordnen können.

Die Zeiten, in denen man die Eigenschaften algebraischer Gebilde so ableitete, daſs man kurzweg nur den allgemeinen Fall in Betracht zog, sind vorüber. Wir werden ja nicht vermeiden können, auch solche Theoreme aufzustellen, die nur „im Allgemeinen" richtig sind; dann aber werden wir den hierin liegenden begränzten Character der Theoreme ausdrücklich hervorheben und jedesmal angeben, was wir dabei unter dem Ausdruck „im Allgemeinen" verstehen.

B) Darstellung bei Zugrundelegung einer einzelnen algebraischen Function s.

Es sei nun s irgend eine algebraische Function auf der m-blättrig über der z-Ebene ausgebreiteten Fläche. Wir werden dann eine Gleichung aufstellen können:

$$s^m + p\,s^{m-1} + q\,s^{m-2} + \dots\dots\dots = 0,$$

deren Wurzeln die verschiedenen zu einem Werthe von z in den m Blättern zugehörigen Werthe s_2, … s_m sind. Da schlieſsen wir zunächst, daſs die Coëfficienten $p, q, \dots$ als symmetrische Verbindungen der $s_1, s_2, \dots$ eindeutige Functionen von z sind, dann aber, insofern s auf der Riemann'schen Fläche keine wesentlich singulären Punkte darbieten sollte, daſs sie rationale Functionen von z sind. s selbst ist also algebraische Function von z, wie wir das schon in Aussicht genommen hatten, als wir s überhaupt als algebraische Function der Riemann'schen Fläche bezeichneten.

Dabei können wir s jedenfalls so annehmen, daſs die Discriminante der angegebenen Gleichung nicht identisch verschwindet. Letzteres könnte nur eintreten, wenn unter den zu demselben Werthe von z gehörigen $s_1, s_2, \dots$ je zwei oder je drei etc. gleich wären. Dies aber tritt sicher nicht ein, wenn wir s etwa von seinen Unendlichkeitspunkten aus construiren, und diese so auf unserer Riemann'schen Fläche annehmen, daſs sie alle zu verschiedenen z gehören (daſs nirgends zwei oder mehr derselben übereinander liegen). Sehen wir von besonderen

Werthsystemen ab, die nur in endlicher Zahl auftreten, so wird bei so gewähltem s nicht nur jedem Punkte der Riemann'schen Fläche blos eine Werthecombination (s,z) entsprechen, sondern jeder Werthecombination auch nur ein Punkt der Fläche. Eine solche algebraische Gleichung ist es dann, die unter

$$f(s,z)=0$$

verstanden sein soll, und von der wir sagen, daſs sie unsere Riemann'sche Fläche *darstelle.*

b) Wir erläutern jetzt am „allgemeinen" Falle der Gleichung $f(s,z)=0$ wie die Eigenthümlichkeiten der „Curve" $f(s,z)=0$ mit denen der zugehörigen Riemann'schen Fläche zusammenhängen. Da zeigt sich sofort:

α') Einem Doppelpunkte der Curve entsprechen *zwei* übereinanderliegende Punkte der Riemann'schen Fläche, in denen die letztere keine weitere Besonderheiten darbietet. In der That läſst sich für eine solche Stelle (s_0, z_0) die Differenz $(s-s_0)$ für jeden der beiden durch den Doppelpunkt durchlaufenden Zweige der Curve in eine gewöhnliche nach ganzen positiven Potenzen von $(z-z_0)$ fortschreitende Reihe entwickeln b') Dagegen entspricht einem Curvenpuncte mit verticaler Tangente ein *Verzweigungspunct* der Riemann'schen Fläche. Die zugehörige Entwickelung hat die Gestalt $s - s_0 = \mathfrak{P}(\pm\sqrt{z - z_0})$.

Man kann sagen, daſs dasjenige Vorkommniſs, welches für die Curve $f(s,z)=0$ wesentlich in Betracht kommt, auf der Riemann'schen Fläche zurücktritt, umgekehrt aber die Puncte für die Riemann'sche Fläche wesentlich werden, die für die Curve nur eine beiläufige Bedeutung haben.

Beiderlei Vorkommniſse liefern nun für die *Discriminante* von $f(s,z)=0$, d.h. für die Resultante von $f=0, \frac{\partial f}{\partial s}=0$, ihren characteristischen Beitrag. Wir wollen uns diese Discriminante so gebildet denken, daſs wir in $f(s,z)=0$ zuvorderst alle Nenner fortschaffen, die Functionen von z sein mögen. Dann wird uns die Discriminante als ganze Function von z, $D(z)$, entgegentreten. Nun bemerkten wir schon früher, daſs sich dieses $D(z)$ in einen *wesentlichen* Factor $D_1(z)$. und in einen quadratisch auftretenden sog. *auſserwesentlichen* Factor $D_2(z)$ spaltet, nach der Formel

$$D = D_1 \cdot D_2^2 .$$

Dabei sollte D_1 von der Auswahl der zur Riemann'schen Fläche gehörigen algebraischen Function s unabhängig sein, D_2 mit ihr wechseln. Die Allgemeingültigkeit dieser Formel wird erst weiter unten von uns abzuleiten sein; hier handelt es sich einstweilen nur darum, ihre Bedeutung im Falle der „allgemeinen" Gleichung $f(s,z)=0$ nachzuweisen. Da ist die Sache die:

Der wesentliche Factor D_1 entspricht den Verzweigungspunkten unserer Riemann'schen Fläche, also den Curvenpunkten mit verticaler Tangente, der außerwesentliche Factor D_2 den Doppelpunkten.

In der That, die Differenz der beiden im Verzweigungspunkte einander gleich werdenden s_1, s_2 wird sich analytisch so darstellen:

$$\sqrt{z-z_0}\ \left(\mathfrak{P}\left(\sqrt{z-z_0}\right)\right).$$

(wo $\mathfrak{P}$ eine Potenzreihe, deren erstes, constantes Glied nicht verschwindet). Daher enthält D (welches die Differenz (s_1-s_2) in's Quadrat erhoben enthält) den rationalen Factor $(z-z_0)$ nur einfach. – Andererseits haben wir für den Doppelpunkt die Darstellung:

$$s_1 - s_2 = (z-z_0)\cdot\mathfrak{P}(z-z_0),$$

und es enthält also D, welches durch $(s_1 - s_2)^2$ theilbar sein muſs, den Factor $(z - z_0)$ doppelt.

c) Ausgehend von $f(s,z) = 0$ läſst sich jetzt jede andere algebraische Function S' der Riemann'schen Fläche rational durch s und z darstellen:

$$S' = R(s,z).$$

Man leistet das am einfachsten durch die Interpolationsformel:

$$S = \sum_{1}^{m} \frac{S_i}{f'(s_i, z)} \cdot \frac{f(s,z)}{s - s_i}.$$

In der That bringen wir hier alle Summenglieder auf gleiche Benennung, – nachdem wir die Division von $f(s,z)$ durch $s - s_i$, die ohne Rest vollzogen werden kann, ausgeführt haben, – so ziehen sich die Coefficienten der einzelnen Potenzen von s zu rationalen Functionen von z zusammen, und wir erhalten eine Formel von folgender Bauart:

$$S' = r_0(z) + r_1(z) \cdot s + r_2(z) \cdot s^2 + \cdots r_{m-1}(z) \cdot s^{m-1}.$$

Die kann man dann hinterher mit Hülfe von $f(s,z) = 0$ noch beliebig modificiren, wobei aber S immer rational in s, z bleibt. –

Ich könnte nun hier unter Bevorzugung des „allgemeinen" Falles, eine Erläuterung darüber eintreten laſsen, wie es bei dieser Darstellung um die Unendlichkeitspuncte von S steht. Inzwischen wird es genügen, eine solche Discuſsion erst sogleich eintreten zu laſsen, wo S und s beide als *ganze* algebraische Functionen der Fläche vorausgesetzt sind. Hier will ich nur den einen Punct hervorheben:

Für die zwei in einem Doppelpuncte von $f(s,z) = 0$ zusammenlaufende Curvenaeste hat s ja denselben Werth. Insofern nun $S = R(s,z)$ könnte es scheinen als müſste eine beliebige algebraische Function S der Fläche in beiden Curvenaesten auch denselben Werth annehmen, in Formel $S_z = S_e$, sofern z, e die beiden Stellen der Riemann'schen Fläche bezeichnen, die im Doppelpuncte der Curve vereinigt sind. *Dann wäre also die beliebige algebraische Function S der Fläche eine gebundene Function*, was doch unmöglich ist. — Die Auflösung dieses Paradoxons liegt darin, daſs noch die Möglichkeit in Betracht kommt, daſs $R(s,z)$ im Doppelpuncte $0/0$ wird, — womit in der That der Widerspruch wegfällt, weil dann der „wahre Werth" von R durch Gränzübergang bestimmt werden muſs und dieser für die beiden Aeste des Doppelpunctes im Allgemeinen verschiedene Werthe ergeben wird. Wollen wir R gleich dem Quotienten zweier ganzen Functionen von s und z setzen

$$R = \Phi(s,z) : \Psi(s,z)$$

und $\Phi = 0$ die Zählercurve, $\Psi = 0$ die Nennercurve nennen. Soll R im Doppelpunkte $0/0$ werden, so werden beide Curven $\Phi = 0$, $\Psi = 0$ durch den Doppelpunkt hindurchlaufen müſsen: *die Curven werden gebunden sein müſsen, damit die Function „frei" sein kann!* Solche „gebundene" Curven nennen Brill und Nöther der „Grundcurve $f = 0$ adjungirt."

Natürlich muſs zwecks allgemeiner algebraischer Darstellung der Functionen S, (sofern wir auf dem hier eingeschlagenen Wege weiter vordringen wollen.) die Theorie der adjungirten Curven für beliebige singuläre Curvenpunkte entwickelt werden, was eine sehr umständliche Aufgabe ist. Dann erst kann man zusehen, wie sich die Darstellung solcher S gestaltet, die an gegebenen Stellen unendlich werden, und versuchen, aus der Darstellung heraus einen Beweis des Riemann Roch'schen Satzes zu finden. Ich muſs mich hier darauf beschränken, auf die beg. Darstellungen bei Weierstraſs, Christoffel u. A. zu verweisen.

Eben da wolle man nun auch nachsehen, wie man Integrale erster, zweiter, dritter Gattung durch Formeln $\int R(s,z)\,dz$ darzustellen hat.

Dabei muſs sich dann zeigen, daſs es genau p linear unabhängige überall endliche Integrale giebt, etc. etc. Wir unterlaſsen, auf diese Entwickelungen im Einzelnen einzugehen, da uns die folgende Nummer für die gleichen Zwecke einfachere Hülfsmittel zur Verfügung stellt.

c) Heranziehung der zur Riemann'schen Fläche gehörigen algebraischen Formen (ganzen algebraischen Functionen.)

a) Was eine zu unserer über der z-Ebene ausgebreiteten R-Fläche zugehörige algebraische *ganze* Function $G(z)$ ist, und wie sich aus ihr der Begriff der *algebraischen Form* (der „ganzen" algebraischen Form):

$$\Gamma_\nu(z, z_2) = z_2^\nu \cdot G(z)$$

entwickelt, haben wir schon neulich gesehen. Was die Gleichung angeht, die G mit z verbindet, so wird dieselbe folgende Form haben:

$$G^m + g^{(1)} \cdot G^{m-1} + g^{(2)} G^{m-2} + \cdots + g^{(m)} = 0,$$

wo die $g^{(1)}, g^{(2)}, \ldots$ rationale ganze Functionen sind. Analog wird für $\underline{T}_\nu$ eine Gleichung bestehen:

$$\underline{T}^m + g_\nu^{(1)} \underline{T}^{m-1} + g_{2\nu}^{(2)} \cdot \underline{T}^{m-2} + \text{-----} = 0,$$

unter $g^{(1)}, g^{(2)}, \dots$ rationale ganze Formen von z_1, z_2 verstanden, deren Grad ersichtlich $\nu, 2\nu, \dots$ beträgt. In solchen Gradbestimmungen ist die homogene Formulirung der nicht homogenen immer überlegen, insofern bei letzterer ein Vorkommniss, welches bei homogener Schreibweise sich dadurch documentirt, dass z_2 in irgend welcher Potenz als Factor vortritt, nur soweit sich geltend machen kann, als der Grad des nicht homogen geschriebenen Ausdrucks unter den Normalgrad sinkt.

So werden wir z. B. für die Discrimante von $\underline{T}$ den Satz haben, dass sie eine rationale ganze Form von z_1, z_2 vom Grade $m(m-1)\nu$ vorstellt:

$$= \Delta\, m.(m-1).\nu;$$

während wir für die Discriminante von Y, wenn wir allgemein sein wollen, nur aussagen können, dass sie eine rationale, ganze Function von z ist, deren Grad den Betrag $m(m-1)\cdot\nu$ nicht übersteigt.

b) Es ist leicht zu sehen, dass die Betrachtung der $\underline{T}$, Y für unseren Zweck der algebraischen Darstellung der zur m-blättrigen Fläche gehörigen Functionen ausreicht. Habe man beispielsweise für s, wie früher:

$$s^m + p s^{m-1} + q s^{m-2} + \dots = 0.$$

So wollen wir mit allen Nennern in z heraufmultipliciren und bekommen eine Gleichung:

$$G_0 s^m + G_1 s^{m-1} + G_2 s^{m-2} + \dots = 0,$$

wo die G rationale ganze Functionen von z sind. Statt dessen schreiben wir jetzt:

$$g_0^m s^m + g_0^{m-1} g_1 s^{m-1} + g_0^{m-1} g_2 s^{m-2} + \dots = 0,$$

und substituiren: $g_0 s = G$. Wir haben dann für G:

$$G^m + g_1 G^{m-1} + g_0 g_2 G^{m-2} + \dots = 0,$$

d.h. G ist eine ganze algebraische Function, *s aber erscheint als Quotient der beiden ganzen Functionen:*

$$s = G / g_0$$

So. 19.12.91.

c) Constatiren wir nun, dass man einfach nach dem *Riemann'-Roch'schen Satze* abzählen kann, wie viele ganze Formen $T_1, T_2, \dots$ ersten, zweiten, ... Grades auf der Riemann'schen Fläche existiren. Es werden nämlich $\frac{T_1}{z_2}, \frac{T_2}{z_2^2}, \dots$ solche ganze Functionen $G_1(z), G_2(z), \dots$ vorstellen, welche nirgendwo sonst, als in den m Stellen $z = \infty$, unendlich werden und in diesen höchstens 1-fach, 2fach, ... Bezeichnen also $\sigma_1, \sigma_2, ..$ die „Ueberschüsse", welche zu den genannten m Stellen gehören, jenachdem man sie nur einfach oder doppelt ... zählt, d.h. die Zahl der Differentiale dw, welche in den m Stellen gleich 0^1, oder gleich 0^2 --- werden, so werden wir einfach haben:

Zahl der linear-unabhängigen $\underline{T}_1$: $m + 1 - p + \sigma_1$,
Zahl der linear-unabhängigen $\underline{T}_2$: $2m + 1 - p + \sigma_2$,
. . . .

Eine besonders einfaches Beispiel giebt natürlich wieder die zweiblättrige Fläche des hyperelliptischen Falles. Inzwischen wollen wir hier ein anderes Beispiel ausführen, das für uns in der Folge besonders wichtig wird, nämlich das Beispiel *der allgemeinen, $(2p-2)$ blättrigen kanonischen Fläche.* Wir haben da $\sigma_1 = 1$, oder $\sigma_2 = 0$, ... insofern doch in den $(2p-2)$ Stellen $z = \infty$ kein $dw = 0^2$, ... werden kann. Daher kommt:

Zahl der $\underline{T}_1$: $2p - 2 + 1 - p + 1 = p$
Zahl der $\underline{T}_2$: $4p - 4 + 1 - p = 3p - 3$
Zahl der $\underline{T}_3$: $5p - 5$ (unter denen die Verzweigungsform Σ einbegriffen sein wird.
Zahl der $\underline{T}_\nu$: für $\nu > 1$: $(2\nu - 1)(p - 1)$.

Neben z_1, z_2 treten hier also noch $(p-2)$ andere lineare Formen auf. Aber diese linearen Formen sind uns von anderer Seite wohlbekannt. Man beachte, daſs $\int \underline{T}_1 (z\, dz) : \Sigma$ nothwendig ein überallendliches Integral sein muſs. *Die p zu unserer kanonischen Fläche gehörigen linearen Formen verhalten sich einfach wie die Differentiale der p zur Fläche gehörigen überallendlichen Integrale, d.h. wie*

$$dw_1 : dw_2 : \dots \dots dw_p .$$

Wir werden diese linearen Formen in der Folge im Anschluſse an die bei zahlreichen Autoren übliche Bezeichnungsweise mit

$$\varphi_1, \quad \varphi_2, \dots \dots \dots \varphi_p$$

benennen. *Diese Formen φ haben für alle auf das algebraische Gebilde bezüglichen Fragestellungen eine ganz besondere Wichtigkeit.* Beispielsweise haben di φ die ausgezeichnete Eigenschaft, daſs sich alle T_2 als rationale ganze Verbindungen 2^{ten} Grades der φ darstellen laſsen, alle T_3 unserer Fläche als rationale ganze cubische Verbindungen der φ, u. s. w. f. Ich werde das dahin kurz ausdrücken, daſs ich sage: *die φ bilden ein volles Formensystem* unserer *kanonischen Fläche*. Dies ist natürlich noch erst besonders zu beweisen (wobei ich schon hier auf Nöther. Annalen 17, 1880 verweisen kann). An sich wäre nur nöthig, daſs die rationalen ganzen quadratischen Verbindungen der φ unter den T_2, die es auf unserer Fläche überhaupt giebt, einbegriffen sind.

d) Darstellung aller ganzen Functionen, bez. Formen einer allgemeinen m-blättrigen Fläche durch eine derselben.

Wir nehmen jetzt die Untersuchungen der Nr. 2) darüber, wie sich eine beliebige algebraische Function S' durch eine bestimmte algebraische Function s darstellt, wieder auf, indem wir uns auf ganze Functionen beschränken (an deren Stelle wir dann bald Formen setzen). Dabei machen wir wieder die Annahme allgemeiner Verhältniſse (was die Discriminante angeht). In der That soll es sich wieder nicht um Ableitung endgültiger Resultate, sondern um vorläufige Aufklärung des Sachverhaltes handeln.

Sei also H irgend welche ganze Function unserer Fläche, welche mit z durch eine Gleichung verbunden ist:

$$H^m + q_1 H^{m-1} + q_2 H^{m-2} + - - - - = 0,$$

deren Discriminante $D = D_1 \cdot D_2^2$ gesetzt werden kann, wo der „*Verzweigungsfactor*“ D_1 mit dem „*Doppelpunktsfactor*“ D_2 keinerlei Bestandtheil gemein hat, auch jeder einzelne derselben, gleich Null gesetzt, lauter getrennte Wurzeln z ergiebt.

Sei G irgend eine andere ganze Function der Fläche. Dann haben wir wie früher:

$$G = \sum_i \frac{g_i}{F'(H_i, z)} \cdot \left(\frac{F(H, z)}{H - H_i} \right),$$

oder wenn wir gleichnamig machen und nach den verschiedenen Potenzen von H ordnen:

$$G = \frac{g'_0 + g'_1 H + g'_2 H^2 + \cdots\cdots g'_{m-1} H^{m-1}}{D}.$$

Da wird man nun umgekehrt fragen, wann ein Ausdruck, wie er hier auf der rechten Seite steht, eine ganze Functionen G der Fläche vorstellen kann?

Er thut es sicher, wenn die einzelnen rationalen ganzen Functionen $g'_0, g'_1, \ldots$ von z, die im Zähler auftreten, durch D theilbar sind, es ist die Frage, ob das nöthig ist. In dieser Hinsicht findet man nun folgendes Theorem: *Es ist in der That nöthig, daſs die $g'_0 \ldots g'_{m-1}$ unserer Formel durch das einfache Product $D_1 \cdot D_2$ theilbar sind. Mit anderen Worten: Jeje ganze Function unserer Fläche kann durch einen Ausdruck folgender Art dargestellt werden:*

$$\frac{g''_0 + g''_1 H + g''_2 H^2 + \cdots\cdots g''_{m-1} H^{m-1}}{D_2},$$

es wird aber nicht möglich sein, den hier noch auftretenden Nenner D_2 weiter zu reduciren.

Sei, um dies zu beweisen, $(z - z^{(1)})$ ein Linearfactor von D_1, $(z - z^{(2)})$ ein solcher von D_2. Wir werden der Reihe nach prüfen, wann der Ausdruck

a) $\dfrac{g'_0 + g'_1 H + \cdots\cdots - g'_{m-1} H^{m-1}}{z - z^{(1)}}$

oder Ausdruck

b) $\dfrac{g'_0 + g'_1 H + \cdots\cdots g'_{m-1} H^{m-1}}{z - z^{(2)}}$

oder endlich der Ausdruck

c) $\dfrac{g'_0 + g'_1 H + \cdots\cdots g'_{m-1} H^{m-1}}{(z - z^{(2)})^2}$

eine ganze Function unserer Riemann'schen Fläche sein kann. Wir gebrauchen zu dem Zwecke geometrische Redeweise. Der Gleichung, welche zwischen H und z besteht, coordonniren wir eine „Grundcurve".

Dieselbe wird von einer „verticalen Geraden" $(z - z') = 0$ in m beweglichen Puncten geschnitten.

Jeder der Ausdrücke a), b), c) liefert uns durch Nullsetzen seines Zählers eine „Zählercurve". Eine solche „Zählercurve" wird von einer verticalen Geraden

$(z - z^{(1)}) = 0$, allgemein zu reden, in $m-1$ Punkten geschnitten. Kommen mehr Schnittpunkte, so muſs deren Zahl gleich ∞ sein. d.h. die verticale Gerade muſs einen Bestandtheil der Zählercurve ausmachen. Dann aber ist $(z - z')$ nothwendig in all den einzelnen $g'_0, g'_1, \dots$ als Factor enthalten. Denn aus

$$g'_0 + g'_1 s + \dots g'_{m-1} s^{m-1} = (z - z')[g''_0 + g''_1 s + \dots g''_{m-1} s^{m-1}]$$

folgt wegen der Irreducibilität der Grundcurve:

$$g'_0 = (z - z')\, g''_0,\ g'_1 = (z - z')\, g''_1, \dots\dots$$

Nehmen wir nun zunächst den Fall a). Die „verticale Gerade" $z - z^{(0)} = 0$ hat mit der Grundcurve m Punkte gemein, von denen zwei in einen „Berührungspunkt" zusammenrücken. Durch eben diese Punkte muſs, damit a) eine ganze Function vorstellen kann, auch die Zählercurve hindurch laufen. Insbesondere muſs letztere die verticale Gerade im „Berührungspunkte" ebenfalls berühren. Daher hat sie mit der verticalen Geraden m Punkte gemein. Daher u.s.w., *so das der Nenner $(z - z^{(1)})$ im Ausdrucke a) nur scheinbar vorhanden ist, indem er gegen die $g'_0, g'_1 \dots$ einzeln weggehoben werden kann.*

Anders im Falle b). Da fallen von n Schnittpuncten der verticalen Geraden $(z - z^{(2)}) = 0$ zwei in den Doppelpunct der Grundcurven und durch diesen braucht dann, damit b) eine ganze Function sei, die Zählercurve nicht etwa doppelt durchzulaufen. *Daher wird sich jetzt das $(z - z^{(2)})$ des Nenners keineswegs gegen die $g'_0, g'_1, \dots$ des Zählers einzeln wegzuheben brauchen*. wir müſsen, damit b) eine ganze Function sei, nur dafür Sorge tragen, daſs die Zählercurve durch besagten Doppelpunct und die $m - 2$ weiteren auf der verticalen Geraden $z - z^{(2)} = 0$ gelegenen Puncte der Grundcurve je einfach hindurchläuft.

Im Falle c) wird sich die Sache wieder mehr nach dem Schema a) gestalten. Wir müſsen jetzt einmal verlangen, daſs die Zählercurve durch die zuletzt genannten $m - 2$ Schnittpuncte der Grundcurve hindurchgeht, und in ihnen, – falls sie dort nicht einen Doppelpunct haben sollte – die Grundcurve berührt. Dann aber müſsen wir verlangen, daſs die Zählercurve im Doppelpuncte der Grundcurve selber einen Doppelpunct hat! Aber dies bringt mit sich, daſs sie mit der verticalen Geraden $(z - z^{(2)}) = 0$ wieder mindestens m Puncte gemein hat. Daher u.s.w., woraus dann folgt, *daſs der Fall c) keine selbständige Bedeutung hat, sondern auf den Fall b) zurückkommt.*

Von hier aus folgt jetzt sofort die behauptete allgemeine Darstellung aller G in der Gestalt

$$\frac{g_0'' + g_1'' H + \cdots\cdots g_{m-1}'' H^{m-1}}{D_2}.$$

Setzen wir es formentheoretisch um, so erhalten wir die Darstellung einer beliebigen Form $\underline{I}$ durch eine gegebene Form k und x_1, x_2 in der Gestalt:

$$\underline{I} = \frac{g_0(x_1, x_2) + g_1(x_1 x_2) k + \cdots\cdots g_{m-1}(x_1, x_2) . k^{m-1}}{\Delta_2},$$

wo der Zähler an allen den Stellen der Grundcurve, in denen $\Delta_2 = 0$, einfach zu verschwinden hat und übrigens der ganze Ausdruck natürlich in x_1, x_2 homogen sein wird.

e) *Der Uebergang zur Minimalbasis $k_0, k_1, \ldots k_{m-1}$*

Die gerade erhaltene Formel kann noch nicht befriedigen. Wenn man denn einmal mit Formen operirt, so wird man auch formal nur mit ganzen Functionen operiren wollen, man wird die I so darstellen wollen, daſs in ihrem Ausdruck überhaupt kein Nenner mehr auftritt. Dies kann man in der That, wie *Kronecker* sowie *Dedekind* und *Weber* gefunden haben (vergl. l. c.) immer erreichen. Man muſs nur darauf verzichten, das beliebige Γ aus den successiven Potenzen

$$K^0, K^1, K^2, \dots\dots\dots K^{m-1}$$

eines einzelnen K linear zusammenzusetzen, man wird vielmehr lineare Zusammensetzung aus m zweckmäſsig gewählten nebeneinanderstehenden Formen:

$$K_0, K_1, K_2, \dots\dots K_{m-1}$$

anstreben. Wir nennen jedes Aggregat von m Formen, durch welches sich die sämmtlichen Γ linear ausdrücken laſsen (mit Coëfficienten die rational von z_1, z_2 abhängen) eine *Basis* der Γ.

Das hier gesuchte Aggregat, bei welchem die Coëfficienten auch noch ganz in z_1, z_2 werden, bei dem also die einfache Darstellung resultirt:

$$\Gamma = g_0(z_1, z_2) K_1 + \dots\dots\dots g_{m-1}(z_1, z_2) K_{m-1}$$

nennen wir aus Gründen, die bald hervortreten werden, eine *Minimalbasis*.

Es ist leicht, sich von der Zusammensetzung einer solchen Minimalbasis (die Existenz derselben wollen wir erst hernach beweisen) eine gewisse Vorstellung zu machen. Wir denken uns die K_0, K_1, K_2, ... nach ihrem Grad in z_1, z_2 geordnet.

Dann überlegen wir folgendermaſsen:

1) Es giebt auf unserer R. Fläche ein einziges T nullter Dimensionen, das ist $T = C$. Auch dieses T muſs in unserer Formel enthalten sein. Wir schlieſsen, daſs $K_0 = C$, oder wie wir der Bequemlichkeit halber sagen wollen, daſs $K_0 = 1$ sein muſs.

2) Mit Hülfe von K_0 kann man nun zwei T vom ersten Grade bilden, nämlich $x_1 \cdot K_0$ und $x_2 K_0$. Aber es gab auf unserer R.Fl. überhaupt $m+1-p+\sigma_1$ Formen T vom ersten Grad. Wir schlieſsen, daſs unter den hinter K_0 folgenden K $(m+\sigma_1-p-1)$ vorhanden sein müſsen; $K_1, K_2, \dots K_{m+\sigma_1-p-1}$, welche den ersten Grad besitzen.

3) Nun setzen wir aus $K_0, \dots K_{m+\sigma_1-p-1}$ mit Hülfe geeigneter Factoren $g(x_1, x_2)$ im Ganzen $3+2(m+\sigma_1-p-1)$ Formen T vom zweiten Garde zusammen. Sind damit die T zweiten Grades, die es giebt, (wir haben deren Zahl früher zu $2m+\sigma_2+1-p$ bestimmt) noch nicht erschöpft, so ist der Ueberschuſs unter die folgenden K aufzunehmen etc. etc.

Beispiel: Die kanonische Fläche mit $2p-2$ Blättern. Wir fanden eben als Zahl der zugehörigen $T_1, T_2, T_3, \dots$ $p, 3p-3, 5p-5, \dots$ Die Minimalbasis wird folgermaſsen zusammengesetzt sein:

a) $K_0 = 1$.

b) $K_1 \dots K_{p-2}$ sind lineare Formen (diejenigen linearen Formen, welche noch neben z_1, z_2 auf der Fläche existiren)

c) $(p-2)$ quadratische Formen: $K_{p-1} \dots K_{2p-4}$

d) eine cubische Form K_{2p-3}

---

22. 12. 91.

Andererseits erkennen wir, indem wir die Existenz der Minimalbasis annehmen, auf das Leichteste, daſs die Discriminante Δ einer beliebigen Form $T(z_1, z_2)$ allgemein immer in $\Delta_1 \Delta_2^2$ zerfällt, wo Δ_1 ein wesentlicher, d.h. bleibender Bestandtheil ist, Δ_2 aber mit der Auswahl von T wechselt (also auſserwesentlich ist.)

Wir wollen diesen Satz erst noch verallgemeinern, ehe wir ihn beweisen.

Die Formen

$$1, T, T_1^2 \, \dots\dots\dots \, T^{m-1}$$

einerseits, die Formen

$$K_0, K_1, K_2, \dots\dots K_{m-1}$$

der Minimalbasis andererseits sind uns nur ein Beispiel für m solche Formen

$$\Lambda_0, \Lambda_1, \Lambda_2, \dots\dots \Lambda_{m-1},$$

zwischen denen keine Idendität.

$$g_0 \Lambda_0 + g_1 \Lambda_1 + \ldots\ldots g_{m-1} \Lambda_{m-1} = 0$$

besteht, unter den g rationale ganze Formen der z_1, z_2 verstanden. Solche m Formen $\Lambda_0 \ldots$ wollen wir überhaupt eine *Basis* nennen und nun unter der *Discriminante der Basis* das folgende Quadrat verstehen:

$$\begin{vmatrix} \Lambda_{0,0} & \Lambda_{0,1} & \ldots\ldots & \Lambda_{0,m-1} \\ \Lambda_{1,0} & \Lambda_{1,1} & \ldots\ldots & \Lambda_{1,m-1} \\ \vdots & \vdots & & \\ \Lambda_{m-1,0} & \Lambda_{m-1,1} & \ldots\ldots & \Lambda_{m-1,m-1} \end{vmatrix}^2$$

(N.B. Die zweiten Indices beziehen sich darauf, daſs wir die Blätter unserer R. Fl. mit $0, \ldots (m-1)$ nummeriren und nun unsere Λ in diesen verschiedenen Blättern betrachten!

Dieselbe ist immer eine rationale ganze Form der z_1, z_2, die wir nun allgemein als Δ bezeichnen wollen. *Auch dieses Δ wird sich in der Gestalt $\Delta_1 \cdot \Delta_2^2$ darstellen laſsen.*

Zum Beweise drücke man einfach die $\Lambda_0, \ldots \Lambda_{m-1}$ durch die Formen der Minimalbasis aus, und substituire die entstehenden Ausdrücke, die folgendermaſsen lauten mögen:

$$\Lambda_0 = g_{00} K_0 + g_{01} K_1 + \ldots\ldots + g_{0,m-1} K_{m-1}$$

$$\Lambda_1 = g_{10} K_0 + \ldots\ldots + g_{0,m-1} K_{m-1}$$

$$\Lambda_{m-1} = g_{m-1,0} K_0 + \ldots\ldots + g_{m-1,m-1} K_{m-1}$$

in den vorstehenden Determinantenausdruck.

Derselbe zerfällt alsdann sofort in das Product zweier Determinanten, so dass wir für Δ folgende Darstellung finden:

$$\Delta = \begin{vmatrix} k_{0,0} & \cdots & k_{0,m-1} \\ k_{1,0} & \cdots & k_{1,m-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{m-1,0} & \cdots & k_{m-1,m-1} \end{vmatrix}^2 \cdot \begin{vmatrix} g_{0,0} & \cdots & g_{0,m-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{m-1,0} & \cdots & g_{m-1,m-1} \end{vmatrix}^2$$

Hier ist das erste Quadrat, welches wir gleich Δ_1 setzen, einfach die Discriminante der Minimalbasis, d. h. in der That von der Auswahl der Basis ∧ unabhängig. Das zweite Quadrat aber ist als Δ_2^2 zu bezeichnen, weil doch die Determinante der $|g_{ik}|$ an sich eine rationale ganze Form der z_1, z_2 ist. –

Man erkennt hiernach insbesondere, warum wir die Bezeichnung „Minimalbasis" wählen: sie stellt diejenige Basis vor, welche die kleinste Discriminante besitzt. Zugleich liegt auf der Hand, welches die geometrische Bedeutung dieser „kleinsten" Discriminante sein wird. Gleich Null gesetzt wird sie diejenigen Stellen der z-Ebene ohne alle fremden Bestandtheile liefern, über denen sich Verzweigungspunkte unserer Riemann'schen Fläche befin-

den, und zwar jede mit derjenigen Multiplicität, welche der Summe der Multiplicitäten der über ihr liegenden Verzweigungspuncte entspricht. *)

Aber die Summe aller Multiplicitäten aller Verzweigungspuncte ist, wie wir wissen, $= 2m + 2p - 2$.

Andererseits ist der Grad unserer Minimaldiscriminante $2\sum \nu_i$, unter $\nu_0, \nu_1, \ldots\ldots \nu_{m-1}$ die Gradzahlen der $K_0 \ldots K_{m-1}$ verstanden. Daher kommt die Formel:

$$m + p - 1 = \sum_0^{m-1} \nu_i \quad \text{oder} \quad p = \sum_1^{m-1} (\nu_i - 1). -$$

Wir bringen nunmehr den Beweis, *dass wirklich immer*, bei beliebig vorgegebener m-blättrigen Riemann'schen Fläche, *eine Minimalbasis $K_0, K_1, \ldots \ldots K_{m-1}$ existirt.* Wir führen den Beweis, indem wir zeigen, wie man sich von irgend einer Basis $\Lambda_0, \Lambda_1, \ldots \Lambda_{m-1}$ beginnend eine Minimalbasis durch eine endliche Anzahl von Schritten herstellen kann. Zu dem Zwecke denken wir uns die $\Lambda_0, \Lambda_1, \ldots$ nach ansteigenden Gradzahlen geordnet. Jetzt prüfen wir, ob es Formen T giebt, die sich aus Λ_0 und Λ_1, oder aus Λ_0, Λ_1 und Λ_2, oder aus den ersten vier Λ, u. s. w. fort linear zusammensetzen lassen, aber nur so linear zusammensetzen lassen, dass dabei ein Nenner auftritt.

---

*) Dieser schöne Satz wird bei Dedekind etc. nicht besonders hervorgehoben, gleich als gingen die Arithmetiker darauf aus, nicht sowohl die Verbindung ihrer Theorien mit den Riemann'schen Anschauungen herzustellen, sondern letztere ganz bei Seite zu schieben!

Sicher müssen wir schliesslich zu Formen T dieser Art kommen, widrigenfalls die $\Lambda_0 \ldots \Lambda_{m-1}$ bereits an sich eine Minimalbasis bilden, worauf nichts zu beweisen ist. Sei etwa

$$T = \frac{g_0(x_1, x_2)\,\Lambda_0 + g_1(x_1, x_2)\,\Lambda_1 + g_2(x_1, x_2)\cdot\Lambda_2}{g(x_1, x_2)}$$

die erste derartige Form. Wir werden dann aus T eine andere Form T'' derselben Eigenschaft herstellen, die wir dann statt Λ_2 in unserer Basis aufnehmen, worauf diese, wie sich zeigen wird, entweder bereits zur Minimalbasis geworden ist oder doch einer solche um einen endlichen Schritt angenähert ist.

Wollen wir zunächst den Nenner $g(x_1, x_2)$ in einen linearen Factor und einen sonstigen Bestandtheil spalten

$$g = (a_1 x_1 + a_2 x_2)\cdot g'.$$

Wir bilden dann

$$g' \cdot \Gamma = \Gamma',$$

das nur noch einen linearen Nenner hat:

$$\Gamma' = \frac{g'_0 \cdot \Lambda_0 + g'_1 \cdot \Lambda_1 + g'_2 \cdot \Lambda_2}{a_1 x_1 + a_2 x_2}$$

und knüpfen unsere weitere Betrachtung an diese Γ' an. Wir vereinfachen daſselbe zunächst so, daſs wir eine lineare Substitution ausgeübt denken, durch welche der Nenner $a_1 x_1 + a_2 x_2$ in x'_2 übergeht. Wir denken ferner die g'_0, g'_1, g'_2 nach Potenzen von x'_1, x'_2 geordnet:

$$g'_0 = c'_0 \cdot x_1'^{\nu_0} + \dots\dots\dots$$
$$g'_1 = c'_1 \cdot x_1'^{\nu_1} + \dots\dots\dots$$
$$g'_2 = c'_2 \cdot x_1'^{\nu_2} + \dots\dots\dots$$

Hier sind die sämmtlichen nicht hingeschriebenen Glieder durch x'_2 theilbar und liefern also für sich eine ganze Function, die wir bei Seite laſsen. Aus den stehenbleibenden Gliedern heben wir endlich $x_1'^{\nu_2}$ als einen Factor heraus. Dies geht, weil der Homogeneität halber $\nu_0 \geqq \nu_1 \geqq \nu_2$ sein wird. Auch wird der Rest nach wie vor eine ganze Function sein. *Diese ganze Function ist es, die wir mit Γ'' bezeichnen.*

$$\Gamma'' = \frac{c'_0 x_1'^{\nu_0 - \nu_2} \cdot \Lambda_0 + c'_1 x_1^{\nu_1 - \nu_2} \Lambda_1 + c'_2 \cdot \Lambda_2}{x'_2}$$

In der That dürfen wir jetzt dieses $\underline{\Gamma}''$ statt Λ_2 in unsere Basis einführen. Denn c'_2 in der vorstehenden Formel ist $\gtrless 0$: wäre es $= 0$, so hätten wir ja schon aus Λ_0 und Λ_1 eine Form zusammensetzen können, welche nothwendig einen Nenner aufweist, entgegen unserer Voraussetzung. Dabei ist der Grad von $\underline{\Gamma}''$ um eine Einheit niedriger als der Grad von Λ_2. Daher ist unsere Basis in der That gebeſsert: denn ihre Discriminante ist ihrem Grade nach um zwei Einheiten herabgedrückt.

Diese gebeſserte Basis ordnen wir nun wieder nach den Gradzahlen ihrer Formen und wiederholen an ihr (falls sie noch keine Minimalbasis sein sollte) genau die gerade geschilderten Operationen etc. etc.

Daſs wir auf dem Wege endlich, nach einer endlichen Zahl von Schritten, zu einer Minimalbasis kommen müſsen, ist klar, denn bei jedem einzelnen Schritte sinkt der Grad der Basisdiscriminante um zwei Einheiten, und es kann doch dieser Grad unmöglich negativ werden.

Mi. 6. I. 92

Wir erläutern kurz, wie die Formen der Minimalbasis mit x_1, x_2 und untereinander durch Gleichungen verbunden sein werden. K_0 nimmt dabei natürlich eine besondere Stellung ein, weil es = Const ist. Sei also K_ν eine von K_0 verschiedene Form der Minimalbasis. So wird man sich folgendes Gleichungssystem bilden können:

$$K_\nu \cdot K_0 = g_{0,0} K_0 + g_{0,1} K_1 + \cdots\cdots g_{0,m-1} K_{m-1},$$

$$K_\nu \cdot K_1 = g_{1,0} K_0 + g_{1,1} K_1 + \cdots\cdots g_{1,m-1} K_{m-1},$$

(I)

$$K_\nu \cdot K_{m-1} = g_{m-1,0} K_0 + \cdots\cdots\cdots g_{m-1,m-1} K_{m-1}.$$

wo die g_{ik} rationale ganze Formen der x_1, x_2 sind (und natürlich die $g_{0,0}, g_{0,1}, \cdots g_{0,m-1}$ sehr einfache Werthe haben). Setzen wir hier die linker Seite stehenden Glieder nach rechts hinüber und eliminieren die dann linear hervortretenden $K_0 \cdots K_{m-1}$, so erhalten wir die Gleichung m^{ten} Grades für K_ν in folgender Form:

$$(\text{II}) \qquad \begin{vmatrix} g_{00} - K_\nu & g_{01} & \cdots\cdots & g_{0,m-1} \\ g_{1,0} & g_{11} - K_\nu & \cdots\cdots & g_{1,m-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ g_{m-1,0} & g_{m-1,1} & \cdots & g_{m-1,m-1} - K_\nu \end{vmatrix} = 0.$$

Haben wir durch sie K_ν als Function von z_1, z_2 bestimmt, so würden wir die uns noch fehlenden $m-2$ der Formen $K_1, \ldots K_{m-1}$ aus irgend $(m-2)$ der Gleichungen I linear berechnen.

So viel über die Formen $T(z_1, z_2)$ auf unserer m-blättrigen Riemann'schen Fläche.

Wir untersuchen jetzt näher, *welche Bewandniß es mit der Darstellung irgend einer algebraischen Function f unserer Fläche als Quotient zweier Formen hat:*

$$f = T_1(z_1, z_2) : T_2(z_1, z_2)$$ [*].

Zu dem Zwecke ist es nützlich, gewisse Erläuterungen über Punktgruppen auf der Riemann'schen Fläche einzuschalten, die später doch nöthig werden.

Diese Erläuterungen schließen sich der Sache nach größtentheils an die Arbeit von Brill und Nöther im Bd. 7. der Annalen an; in der Terminologie folge ich zum Theil Dedekind und Weber (und zwar aus Gründen, die ich noch genauer angebe).

---

[*] Wir können da natürlich sofort die Formen der Minimalbasis einführen und also schreiben: $f = \sum_0^{m-1} \gamma_\varrho^{(1)} K_\varrho : \sum_0^{m-1} \gamma_\varrho^{(2)} K_\varrho$.

Zwei Punktgruppen Π_1 und Π_2 der Riemann'schen Fläche sollen *aequivalent* heiſsen (B. N. „corresidual"), wenn es eine algebraische Function der Fläche giebt, deren Nullpunkte nach Π_1 und deren Unendlichkeitspunkte nach Π_2 fallen. Dies schlieſst natürlich ein, daſs die beiden Punktgruppen gleich zahlreich sind und keinen Punkt gemein haben. Uebrigens ist die Beziehung von Π_1 und Π_2 eine gegenseitige. Denn wenn f in den Punkten von $\Pi_1 = 0$ und in den Punkten von $\Pi_2 = \infty$ wird, so wird $1/f$ welches doch auch eine algebraische Function der Fläche ist, in den Punkten von $\Pi_2 = 0$ und in den Punkten von $\Pi_1 = \infty$. Zur Aequivalenz von Π_1, Π_2 wird überhaupt ausreichen, wenn es ein f giebt, welches in den Π_1 den constanten Werth C_1, in den Π_2 den Werth C_2 annimmt. Denn es wird dann $\frac{f-C_1}{f-C_2}$ in den Π_1 zu 0, und in den Π_2 zu ∞. —

Aus dem Gesagten geht hervor, daſs überhaupt alle die ∞^1 Punktgruppen, in denen $f = C$ wird, untereinander aequivalent sind. Insofern diese Gleichung die Constante C linear enthält, werden wir die gefundene Schaar von Punktgruppen eine *einfach unendliche Lineare Schaar aequivalenter*

Punktgruppen nennen. Solch' eine lineare Schaar haben wir beispielsweise vor Augen, wenn wir bei unserer m-blättrigen Fläche die Gruppen von jedesmal m Punkten betrachten, die an irgend einer Stelle der z-Ebene übereinander liegen.

Umgekehrt wird man jeder linearen Schaar aequivalenter Punktgruppen die hier vorliegende geometrische Anordnung geben können, sobald man das zugehörige f dazu benutzt, unsere Riemann'sche Fläche über die f-Ebene conform auszubreiten.

Es wird kaum nöthig sein, jetzt noch besonders zu sagen, was eine *mehrfach unendliche lineare Schaar* aequivalenter Punktgruppen sein soll. Die einfachsten Beispiele giebt wieder die über der z-Ebene ausgebreitete Fläche. Die Formen ersten, zweiten, dritten ... Grades, die auf dieser Fläche existiren, bilden je eine lineare Schaar, sagen wir mit $m_1, m_2, ..$ linear vorkommenden Parametern. Setzen wir die Formen ersten Grades nun $= 0$, so liefert uns das eine $(m_1 - 1)$ fach unendliche lineare Schaar von Punktgruppen, ebenso geben die Formen zweiten Grades eine $(m_2 - 1)$ fach unendliche Schaar etc. etc. Wir wollen diese Punktgruppen, bez. Schaaren, als *Normalgruppen*, bez. *Normalschaaren* bezeichnen. „Normal" sind dieselben natürlich nur, insofern wir an die m-blättrige Fläche über der z-Ebene anknüpfen, sie sind nicht etwa auf der abstracten Riemann'schen Fläche vor anderen ausgezeichnet.

Mögen wir nun noch eine *Erweiterung* des Aequivalenzbegriffes eintreten lassen. Es sei Π irgend welche Punktgruppe. Ferner seien Π_1 und Π_2 im früheren Sinne aequivalent. Dann wollen wir auch $\Pi_1 \Pi$ und $\Pi_2 \Pi$ aequivalent nennen [wo die Zusammenstellung der beiden Π einfach aussagt, dass wir die beiden Punktgruppen zusammennehmen]. Zwei Punktgruppen werden jetzt also aequivalent heissen können, wenn sie eine Anzahl Punkte gemein haben.

Danach können wir z. B. den Riemann-Roch'schen Satz als einen Satz über Punktgruppen aussprechen. Seien irgend m Punkte gegeben mit dem „Ueberschusse" σ, so giebt es, wie wir wissen, $\infty^{m-p+1+\sigma}$ Functionen.

$$F = c_1 F_1 + \dots\dots\dots\dots c_{m-p+\sigma} F_{m-p-\sigma} + C,$$

deren Unendlichkeitsstellen in diesen m Punkten liegen. Wir denken jetzt an die früher erörterte Möglichkeit, daſs nicht sämmtliche m Punkte wirkliche Unendlichkeitsstellen von F sein mögen. Die so hervorkommenden, nicht als Unendlichkeitsstellen benutzten gegebenen Punkte fügen wir jetzt den Nullstellen von F. hinzu. So bekommen wir eine neue Punktgruppe, welche mit der Gruppe der gegebenen m Punkte jedenfalls im erweiterten Sinne aequivalent ist. Augenscheinlich bekommen wir den Satz: *Die Gesammtheit der Punktgruppen, welche mit der Gruppe der gegebenen m Punkte aequivalent sind, bildet eine $(m - p + \sigma)$-fach unendliche lineare Schaar.*

Doch wir kehren zu der Frage zurück, wie man eine irgendwie auf der Fläche definirte algebraische Function f durch Formen Π darstellt. Schreiben wir zu dem Zwecke symbolisch

$$f = c \cdot \frac{\Pi_1}{\Pi_2},$$

wo die multiplicative Constante c vorgesetzt ist, um anzudeuten, daſs f durch Π_1 und Π_2 allein (die „Zählergruppe" und „Nennergruppe" bei Dedekind und Weber: das „Obereck" und „Untereck") nur erst bis auf einen constanten Factor definirt ist. Da kann es nun sein, daſs Π_2 an sich eine Normalgruppe irgend welchen Grades ist. Sollte es nicht der Fall sein, so werden wir in mannigfachster Weise eine Ergänzungsgruppe Π so finden können, dass $\Pi_2\,\Pi$ eine Normalgruppe vorstellt. Wir schreiben dann

$$f = c\,\frac{\Pi_1\,\Pi}{\Pi_2\,\Pi}\,.$$

Sei nun T_2 diejenige algebr. Form, die in Π_2, bez. $\Pi_2\,\Pi$ verschwindet. Das Product $T_2 \cdot f$ ist dann eine Form, welche nirgendwo unendlich wird, d. h. eben auch eine ganze algebraische Form, die wir mit T_1 bezeichnen wollen. Wir finden so die gewünschte Darstellung:

$$f = \frac{T_1}{T_2}\,.$$

Die Function f lässt sich genau so oft als Quotient zweier Formen T darstellen, als Punktgruppen Π gefunden werden können, welche die Gruppe Π_2 der Unendlichkeitspunkte zu einer Normalgruppe ergänzen.

Zugleich aber ergiebt sich der schöne Satz: Eine Gruppe Π, welche Π_2 zu einer Normalgruppe ergänzt, ergänzt auch jede mit Π_2 aequivalente Gruppe Π_1 zu einer solchen.

Ich werde diesen Satz entsprechend einer von *Nöther* in etwas anderer Gedankenverbindung gewählten Bezeichnung als *Restsatz* bezeichnen, genauer als den auf unsere m-blättrige Fläche bezüglichen Restsatz. Dieselbe „Restgruppe" Π ergänzt Π_1 und Π_2 zu einer Normalgruppe. Von hier aus versteht man, daſs man Π_1 und Π_2 als „corresidual" bezeichnen kann, wie es Brill und Nöther thun. Nur werden wir uns nicht entschlieſsen wollen, die Aequivalenz zweier Punktgruppen geradezu als Corresidualität bezüglich der Normalgruppen von Hause aus zu definiren. Denn der Aequivalenzbegriff ist ganz unabhängig davon, in welche besondere Form wir die R. Fläche gesetzt denken mögen, der Begriff der Normalgruppe und der an sie anknüpfende Begriff der Corresidualität sind davon abhängig. Die Brill-Nöther'sche Corresidualität ist zwar etwas anders definirt, als wir hier voraussetzen, aber auch von ihr gilt, daſs sie an eine bestimmte Darstellungsform des algebraischen Gebildes anknüpft.

Im Uebrigen ist hier die Stelle, wo wir begreiflich machen können, wie so *Dedekind* und Weber, bez. Kronecker die Theorie der Formen Γ (oder wie sie sagen, ganzen Functionen G) in ihren Arbeiten fortgesetzt mit der Theorie der ganzen algebraischen Zahlen parallelisieren.

Ich gehe hierauf um so lieber kurz ein, als wir dadurch von der uns geläufigen Theorie der Γ aus einen ersten Einblick in letztere wichtige Theorie gewinnen.

Vergleichen wir zunächst die Theorie der gewöhnlichen ganzen Zahlen a mit der Theorie der rationalen ganzen Formen von z_1, z_2. $g(z_1, z_2)$! Da fanden wir in der That beidemal den Zerlegungssatz: dass mann a, bez. g nur auf eine Weise in weiter unzerlegbare Factoren zerspalten kann [nämlich a in seine Primfactoren, g in seine Linearfactoren].

Nun ist weiter die Art, wie man von den a zu den algebraischen ganzen Zahlen A schreitet, genau so, wie der Schritt von den g zu den Γ. Man nennt A eine algebraische ganze Zahl, wenn es einer Glch. genügt:

$$A^m + \alpha_1 A^{m-1} + \dots\dots\dots \alpha_m = 0,$$

deren höchster Coëfficient $= 1$ und deren sämmtliche andere Coëfficienten gewöhnliche ganze Zahlen sind!

Aus dem A gelangt mann dann ferner genau so zu einem „Integritätsbereiche", wie aus dem einzelnen T. Dieser Bereich wird von allen Zahlen

$$\frac{\alpha_0 A^0 + \alpha_1 A^1 + \cdots\cdots \alpha_{m-1} A^{m-1}}{\delta}$$

gebildet werden, (α, δ gewöhnliche *ganze* Zahlen), die selber ganze algebraische Zahlen sind! Der Nenner δ ist dabei nothwendig ein Theiler derjenigen ganzen Zahl, welche sich bei der Discuſsion der für A geltenden Gleichung als „auſserordentlicher Theiler der Discriminante" ergiebt.

Die Zahlen unseres Integritätsbereiches erscheinen hier auf die „Basis"

$$A^0, A^1, \dots\dots A^{m-1}$$

bezogen. Man wird statt ihrer irgendwelche andere „Basis" einführen können. Und nun zeigen Ueberlegungen, die genau den früheren nachgebildet sind, daſs es insbesondere immer eine „Minimalbasis"

$$B_0, B_1, \dots\dots B_{m-1}$$

giebt, d.h. eine Basis, durch deren ganze Zahlen sich alle Zahlen des Integritätsbereiches in der Gestalt

$$\alpha_0 B_0 + \alpha_1 B_1 + \dots\dots \alpha_{m-1} B_{m-1}$$

darstellen laſsen.

Wir fragen jetzt nach den Gesetzen der Factorenzerlegung. Da tritt nun auch bei den $T(x_1, x_2)$ dieselbe Erscheinung auf, welche zuerst bei den A bemerkt wurde, *dass nämlich die Zerlegung in Primfactoren (d.h. innerhalb des Integritätsbereiches nicht weiter zerlegbare Factoren) nicht mehr nothwendig eine eindeutige ist*, womit alle die bequemen Verfahrungsweisen hinfällig werden, die auf dieser Eindeutigkeit beruhen. Hierfür zunächst zwei Beispiele:

1) Wir betrachten das algebraische Gebilde $s^2 = 2z^2 - 1$, oder homogen geschrieben $\sigma^2 = 2x_1^2 - x_2^2$, und auf ihm die Form zweiten Grades $\underline{T} = \sigma^2 - x_1^2 = x_1^2 - x_2^2$. Dies ist auf zwei verschiedene Weisen in zwei Linearformen zu zerspalten: das eine Mal haben wir $\underline{T} = (\sigma + x_2)(\sigma - x_1)$, das andere Mal $T = (x_1 + x_2)(x_1 - x_2)$.

Und diese Zerspaltungen sind nicht weiter auf einander reducirbar, da es doch (innerhalb unseres Integritätsbereiches) nicht angeht eine Linearform weiter zu zerlegen.

2) Wir betrachten die algebraischen ganzen Zahlen der Gestalt:

$$\alpha = \frac{\alpha_0 + \alpha_1\sqrt{-5}}{\delta}$$

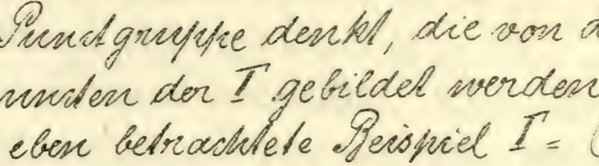
Eine solche Zahl genügt der quadratischen Gleichung:

$$\alpha^2 + \frac{2\alpha_0}{\delta}\cdot\alpha + \frac{\alpha_0^2+5\alpha_1^2}{\delta^2} = 0$$

Hier folgt zunächst, damit die Coëfficienten der Gleichung ganzzahlig sind, $\delta = 1$, also $\alpha = \alpha_0 + \alpha_1\sqrt{-5}$, was besagt, daſs für unseren Integritätsbereich 1 und $\sqrt{-5}$ eine Minimalbasis bilden. In diesem Integritätsbereich sind nun, wie ich behaupte, die Zahlen 3 und 7 nicht weiter zerlegbar. Man müſste sonst 3 oder $7 = (\alpha_0 + \alpha_1\sqrt{-5})(\alpha_0 - \alpha_1\sqrt{-5}) = \alpha_0^2 + 5\alpha_1^2$ setzen können. Dies würde sagen, daſs 3 bez. 7, modulo 5 zu α_0^2 congruent wären, was nicht angeht, weil 3 bez. 7, modulo 5 Nichtreste sind. Aber nun nehme man das Product $3.7 = 21$! Dasselbe kann seinerseits wohl in zwei complexe Zahlen unseres Bereiches gespalten werden: $21 = (1 + 2\sqrt{-5})(1 - 2\sqrt{-5})$.

Die hier zu Tage tretende Unzuträglichkeit überwendet man in der Zahlentheorie bekanntlich durch Einführung *idealer* Factoren (neben den *wirklichen* Factoren). Und nun ist die Sache die, daſs man nicht nur ohne Weiteres ganz den gleichen Schritt bei den $\underline{I}$ machen kann (wie Kronecker und Dedekind-Weber hervorheben), sondern daſs man denselben vermöge der von uns bereits entwickelten Anschauungen bei den $\underline{I}$ besonders einfach versteht, womit dann der entsprechende Ansatz der Zahlentheoretiker leichter zugänglich wird. Wir haben zu dem Zwecke nur an die Punctgruppe der Riemann'schen Fläche zu denken, in deren Puncten I verschwindet, und nun I als das Product gedachter (idealer, nicht wirklich vorhandener) algebraischen Formen aufzufaſsen, deren jede nur in einem Puncte der Riemann'schen Fläche verschwindet (so daſs uns also jeder Punct der Riemann'schen Fläche einen Primfactor vorstellt).

Diese Idee, vermöge deren selbstverständlich die Eindeutigkeit der Zerlegung in Primfactoren wieder hergestellt wird, ist nur eine andere Einkleidung dafür, daſs man zwecks Discuſsion der zwischen den I bestehenden Relationen immer an die Punctgruppe denkt, die von den Verschwindungspuncten der I gebildet werden. Nehmen wir das eben betrachtete Beispiel $I = (\sigma + z_1)(\sigma - z_1) = (z_1 + z_2)(z_1 - z_2)$ wieder auf. Daſselbe wird, wenn wir die Gruppen der Verschwindungspuncte heranziehen, in der That sofort verständlich. $I = 0$ liefert auf der in Betracht kommenden zweiblättrigen Fläche 4 Stellen, die wir schematisch so andeuten mögen:



Und diese werden bei unserer Factorenzerlegung einfach auf zwei Weisen, das eine Mal so, wie die horizontalen Klammern andeuten, das andere Mal so wie sie übereinanderliegen, zu Nullstellen von Linienformen zusammengefasst. Das drückt man denn in der Idealtheorie so aus: T hat vier ideale Factoren, die durchaus bestimmt sind. Die Doppelformel $\underline{T} = (\sigma + \tau_1)(\sigma + \tau_2) = (\tau_1 + \tau_2)(\tau_1 - \tau_2)$ besagt mir, dass man diese 4 Factoren auf zwei Weisen zu wirklichen Factoren zusammenfassen kann.

r. 9 I 92. Genau so erklärt man in der Zahlentheorie die eben gefundene Gleichung $3 . 7 = (1 + 2\sqrt{-5})(1 - 2\sqrt{-5})$ in der Weise, dass man sich die Zahl 21 in vier ideale Factoren $\xi_1, \xi_2\ y_1, y_2$ zerlegt denkt, wo dann etwa $3 = \xi_1 \xi_2$, $7 = y_1 y_2$, $1 + 2\sqrt{-5} = \xi_1 y_1$, $1 - 2\sqrt{-5} = \xi_2 y_2$ zu setzen sein wird. Natürlich muss man ausdrücklich nachweisen, dass bei der Einführung solcher idealer Factoren sich weder ein Widerspruch noch eine Vieldeutigkeit ergiebt. Die bedarf langer Entwickelungen, wegen deren man in der Zahlentheorie von Dedekind-Dirichlet, $2^{\underline{te}}$ oder $3^{\underline{te}}$ Auflage, das von Dedekind zugefügte letzte Supplement, oder denn die Entwickelungen Kroneckers in Crelle 92 vergleichen mag. Hier nur einige einzelne Bemerkungen:

a) Wie entscheidet man, nach Kronecker, ob zwei Zahlen A_1, A_2 eines Bereiches einen idealen Factor gemein haben? Man bildet sich $u_1 A_1 + u_2 A_2$, wo die u_1, u_2 „unbestimmte Grössen", und bildet dann die „Norm", d.h. das Product aller der Werthe, die $u_1 A_1 + u_2 A_2$ in den verschiedenen Blättern der definirenden Riemann'schen Fläche (wenn wir uns in solch' übertragener Weise ausdrücken dürfen) annimmt. Wir legen A_1 und A_2 einen gemeinsamen idealen Factor bei, sobald diese Norm, unabhängig von den Werthen, welche die u_1, u_2 haben mögen, einen wirklichen Factor hat. Heisst der letztere q, so bezeichnet Kronecker den in A_1, A_2 stehenden idealen Factor geradezu mit

$$\frac{u_1 A_1 + u_2 A_2}{N.(u_1 A_1 + u_2 A_2)} \cdot q.$$

b) Dedekind zieht vor, nicht sowohl von dem „gedachten" Factor zu sprechen, den irgend welche Zahlen A oder Formen Γ gemein haben können, sondern von der Gesammtheit der Zahlen, resp. Formen, welche einen Factor gemein haben, und die ja in allen Fällen etwas Wirkliches, Fassbares ist. Er bezeichnet diese Gesammtheit als ein „Ideal" und entwickelt beispielsweise, daſs jedes Ideal seine aus m Zahlen, bez. Formen bestehende „Minimalbasis" hat etc.

Früher haben wir Formen I auf der Riemann'schen Fläche, welche irgendwelche gegebene Verschwindungspunkte besitzen, als „gebundene" Formen oder „adjungirte" Formen bezeichnet. Der Inbegriff solcher gebundenen Formen entspricht also genau der Dedekind'schen Definition des Ideals.

c) Sehen wir doch, daſs wir den Restsatz (demzufolge zwei aequivalente Punktgruppen Π_1, Π_2 je durch dieselbe zutretende Punktgruppe Π zu Normalgruppen ergänzt werden) in die Sprache der Idealtheorie übertragen und zugleich so umkehren, daſs er eine Definition der Aequivalenz ist.

Wir erhalten dann: *Zwei ideale Factoren heissen aequivalent, wenn sie mit demseben dritten Factor multiplicirt wirklich werden.* In dieser Form ist der Satz in der That seit lange den Zahlentheoretikern geläufig. —

Zum Schluſse bleibt uns noch nachzutragen, wie man auf der m-blättrigen Fläche vermöge der g, $K_0, \dots K_{m-1}$ die Integrale erster, zweiter, dritter Gattung darzustellen vermag. Ein solches

Integral stellt sich jedenfalls in der Form dar:

$$\int \Phi_{-2}(x_1, x_2) \cdot [x\,d\,x].$$

wo Φ_{-2} eine algebraische Form (-2)ter Dimension der x_1, x_2 ist. Aus den Unendlichkeitsstellen von Φ wird man dann sofort auf die Unendlichkeitsstellen des Integrals schliessen. Wir führen das nicht aus, sondern beschränken uns darauf, folgenden Satz anzugeben (den man sofort durch Reihenentwickelung beweist): *Hängen an einer Stelle der Fläche ρ Blätter cyclisch zusammen, so bleibt das Integral an der betr. Stelle so lange endlich, als Φ_{-2} dort nicht stärker als $(\rho - 1)$ fach unendlich wird.* Von hier aus wird man die folgende Methode controliren die Dedekind und Weber für den Aufbau der Integrale erster Gattung entwickelen: Die genannten Autoren bilden aus den verschiedenen Werthen, welche die $K_0 \dots K_{m-1}$ an den schiedenen Blättern der Fläche besitzen, zuvörderst die Determinante

$$\underline{V} = \begin{vmatrix} K_{0,0} & \dots\dots\dots & K_{0,m-1} \\ K_{1,0} & \dots\dots\dots & K_{1,m-1} \\ & & \\ K_{m-1,0} & \dots\dots & K_{m-1,m-1} \end{vmatrix}$$

(deren Quadrat die Discriminante Δ ist.) Berechnen wir dann die Differentialquotienten

$$\frac{\partial \log V}{\partial k_{\mu,0}}, \quad \frac{\partial \log V}{\partial k_{\mu,1}}, \ldots\ldots\ldots \frac{\partial \log V}{\partial k_{\mu,m-1}},$$

so sind dies die Werthe, welche eine neue Form

$$\Lambda_\mu$$

in den verschieden Blättern der Fläche annimmt. Die Reihenfolge

$$\Lambda_0, \Lambda_1, \ldots \Lambda_\mu, \ldots \Lambda_{m-1}$$

heiſst die zur Basis der k *complementäre* Basis. Ist k_μ vom Grade ν in den x_1, x_2, so Λ_μ vom Grade $-\nu$. *Die Integrale erster Gattung stellen sich darauf durch die Formel dar:*

$$\int \sum_{\nu \geqq 2} g_\mu \cdot \Lambda_\mu \cdot [x\, dx].$$

Hier werden die g_μ rationale ganze Formen der x_1, x_2 vom Grade $\nu - 2$, die dementsprechend $(\nu - 1)$ willkürliche Constante enthalten. In der That haben wir ja schon früher gelernt, daſs $\sum\limits_{\nu \geqq 2} (\nu - 1)$ oder, was daſselbe ist $\sum\limits_{\nu \geqq 1} (\nu - 1)$ gleich p ist, wie es sein soll. —

Wir schlieſsen dieses lange Kapitel, indem wir noch kurz von der Darstellung der Integrale auf den *kanonischen* Flächen handeln, wobei ich wegen der näheren Ausführung durchweg auf meine Arbeit über Abel'sche Functionen in Bd 36 der Annalen, bez. auf meine Vorlesung II über Abel'sche Functionen von Winter 1888-89 verweise. Der Zweck muſs dabei sein, sich davon zu überzeugen, wie viel einfacher die ganze Theorie bei Zugrundelegung der kanonischen Flächen wird, so daſs man nicht anstehen wird bei allgemeinen Untersuchungen über algebraische Gebilde, bei denen man sich die m-blättrige Form, in der man das Gebilde behandelen will, beliebig aussuchen darf, immer eine kanonische Form zu Grunde zu legen.

Von der Darstellung der Integrale auf den kanonischen Flächen.

1) Im Falle der kanonischen Fläche war m ein Theiler von $2p-2$:

$$md = 2p-2,$$

und es gab dementsprechend $m(d+2)$ Verzweigungspunkte. Diese waren dann die Nullpunkte einer Form $(d+2)^{\text{ten}}$ Grades, der „Verzweigungsform" T. Offenbar können wir die Definition der kanonischen Fläche jetzt auch so aussprechen: „Die Verzweigungspunkte der Fläche bilden eine Normalgruppe," oder auch: „Das Verzweigungsideal der Fläche ist wirklich."

2. Man könnte nun unternehmen, hier genau nach den Vorschriften von Dedekind und Weber zu verfahren, die completäre Basis der A_μ zu bilden etc. Aber dies würde zu unnöthig hohen Bildungen führen. Statt dessen schreiben wir mit Hülfe der Verzweigungsform σ *die Integrale erster Gattung* gleich in der Form hin:

$$\int \frac{\underline{T}_\alpha(x_1,x_2)\,[x\,dx]}{\sigma(x_1,x_2)},$$

wo T_α irgend eine ganze Form α^{ten} Grades bezeichnet und uns übrigens zum ersten Male der Differentialausdruck

$$\frac{[x\,dx]}{\sigma(x_1,x_2)}$$

entgegentritt, den wir in der Folge mit $d\omega$ bezeichnen. Wir schliessen, dass $\underline{T}_\alpha$ hier genau p willkürliche Constante enthalten muss. Einen besonderen Fall dieser $T_\alpha(x_1,x_2)$ bilden die rationalen $g_\alpha(x_1,x_2)$ mit $\alpha+1$ willkürlichen Constanten. Im hyperelliptischen (zweiblättrigen) Falle werden die g_α mit dem T identisch, und die Integrale erster Gattung erscheinen dann, wenn man noch für $\sigma(x_1,x_2)$ den üblichen Werth $\sqrt{f_{2p+2}(x_1,x_2)}$ einführt in der wohlbekannten Gestalt:

$$\int \frac{\varphi_{p-1}(x_1, x_2)\,[x\,d\,x]}{\sqrt{f_{2p+2}(x_1, x_2)}}\,.$$

Mi. 13. 1. 92

3) Ich erwähne ferner die elegante Darstellung der Integrale dritter Gattung in Gestalt von Doppelintegralen, die hier resultirt. Man findet

$$\mathfrak{P}^{xy}_{\xi\eta} = \int_y^x \int_\eta^\xi \cdot \frac{\Psi(x|\xi)}{(x\xi)^2}\, d\omega_x\, d\omega_\xi,$$

wo Ψ eine ganze algebraische Form $d+2$ten Grades sowohl in den x_1, x_2 als den ξ_1, ξ_2 ist, die folgende Eigenschaften hat:

a) Wird $x = \xi$, ohne dass die zugehörigen Stellen x, ξ auf der Riemann'schen Fläche zusammenfallen, so wird Ψ Null wie $(x\xi)^2$;

b) Fallen aber x und ξ auf der Riemann'schen Fläche zusammen, (so zwar, dass $x_1 = \xi_1$, $x_2 = \xi_2$), so geht Ψ in $[\sigma(x_1, x_2)]^2$ über.

Umgekehrt wird jede Form $\Psi(x, \xi)$ der hiermit beschriebenen Art, in das Doppelintegral eingesetzt, ein Integral dritter Gattung $\mathfrak{P}^{xy}_{\xi\eta}$ geben.

4) Von hier aus ergiebt sich dann auch eine volle Festlegung der Integrale zweiter Gattung x^{xy}_{t}, was die Abhängigkeit von der Unstetigkeits-

stelle angeht. Wir hatten früher geschrieben:

$$\hbar^{xy}_{t} = \left\{ dP^{xy}_{\xi,\eta} \,\middle|\, df(\xi) \right\}_{\xi' = t}$$

dabei aber unentschieden gelassen, welche Function $f(\xi)$ beim Differentiiren benutzt werden sollte. Jetzt werden wir jedenfalls setzen wollen

$$\hbar^{xy}_{t} = \int_y^x \frac{\Psi(x,t)}{(xt)^2}\, dw_\zeta \,,\ \text{d.h.} = \left\{ dP^{xy}_{\xi\, y} \,\middle|\, dw_\xi \right\}_{\xi=t}.$$

Da hat sich also $\hbar$, was die Abhängigkeit von der Unstetigkeitsstelle angeht, in eine Form von t_1, t_2 vom (td)ten Grade in diesen Variabelen verwandelt. Die hierin liegende Normirung des $\hbar$ erweist sich als äußerst nützlich; insbesondere wird der Aufbau der algebraischen Functionen aus verschiedenen Summanden $\hbar$, wie wir ihn früher besprochen, und damit die Begründung des Riemann-Roch'schen Satzes bei der so festgelegten Normirung wesentlich durchsichtiger.

5) Endlich aber gelingt es, eine von 2 Stellen x, y der Riemann'schen Fläche abhängende Form zu construiren, welche nirgends unendlich wird und nur dann verschwindet, wenn die Stellen xy auf der Fläche zusammenfallen,

eine Form also, welche dem früher nur postulirten idealen Primfactor der Fläche entspricht. Diese Form ist nicht völlig bestimmt, sondern kann u. A. in ihrem Grade durch Zufügung eines nirgends verschwindenden Factor's noch beliebig modificirt werden. Die „Primform", die ich in Annalen 36 mittheile, und die von allen zulässigen Formen die einfachste sein dürfte, hat in den x, bez. y den Grad $-d/2$. Wollen wir aber eine algebraische Form ϱ^{ten} Grades $\underline{T}_\varrho$, die in ϱm Punkten unserer Fläche verschwindet, als Product von ϱm Primfactoren hinschreiben, so müssen wir jedem einzelnen Primfactor offenbar den Grad $\frac{1}{m}$ zuweisen. Eine dahingehende Modification kann der in Bd. 36 benutzten Primform leicht aufgeprägt werden, indem man ihr eine geeignete Potenz der eben dort eingeführten nirgends verschwindenden „Mittelform" zugefügt. So entsteht die neue Primform vom Grade $1/m$ in den $\underline{x}_1, \underline{x}_2$ wie in den y_1, y_2, die ich zur Unterscheidung durch einen horizontalen Strich bezeichnen will:

$$\bar{\Pi}(x,y).$$

Unter den verschiedenen Formeln, durch welche man dieselbe darstellen kann, will ich hier wir folgende erwähnen, in denen Δ die Discriminante $(2m+2p-2)^{\text{ten}}$ Grades der kanonischen Fläche bedeutet, σ die Verzweigungsform d^{ten} Grades, und $x_0 \ldots\ldots x_{m-1}$ (allgemein x_i) die Stellen sind, die dem Werthe x von z auf der Riemanschen Fläche entsprechen, $y_0 \cdots y_{m-1}$ aber (allgemein y_k) die Stellen, die dem Werthe y von z auf der Fläche zu gehören:

$$\Lambda(x_0, y_0) = \sqrt[2m]{\frac{(x\,y)^2\,\Delta(x,x_2)\cdot\Delta(y,y_2)}{\sigma(x,x_2)^m\cdot\sigma(y,y_2)^m}}\cdot e^{\frac{1}{2}(m-1)\sum\sum_i \wp^{x_i\,y_k}_{x_0\,y_0} - \frac{1}{2}(m-1)\frac{m}{2}\sum\sum\sum\wp^{x_i\,y_k}_{x_{i'}\,y_{k'}}}$$

Vermöge dieses $\bar{\Lambda}$ (deſsen Eigenschaften wir hier nicht näher studiren) wird sich dann eine Form $\underline{T}_\rho$ der Fläche, deren Nullstellen nach $y^{(1)} \ldots y^{(m\rho)}$ fallen mögen, in der Gestalt darstellen laſsen:

$$\underline{T}_\rho(x, x_2) = C.\prod_1^{m\rho} \bar{\Lambda}(x, y^{(i)}).$$

V. Einige Anwendungen der bislang entwickelten Theorie nebst Andeutungen über deren Weiterbildung.

Will man irgend ein Gebiet mathematischer Forschung nach seiner Gliederung überblicken, so ist dazu ein Princip dienlich, von dem ich in meinem Erlanger Antrittsprogramm 1872 bezüglich der verschiedenen in der *Geometrie* entwickelten Tendenzen Anwendung gemacht habe. Dies Princip besteht darin, daſs man immer nach denjenigen *Aenderungen* fragt, bei denen die gerade betrachteten Entwickelungen *invariant* bleiben, und nun danach claſsificirt, *jenachdem die Gruppe dieser Aenderungen mehr oder minder ausgedehnt ist.*

Dieses Princip werden wir hier auf die Riemann'sche Theorie (soweit wir dieselbe jetzt kennen) anwenden dürfen.

Da finden wir zunächst Entwickelungen, die bei *beliebiger eindeutiger Transformation* der R.-Fläche invariant sind. Dahin gehören die Definition des p einer Fläche, die Definition der kanonischen Schnittsysteme u. s. w.

Weiter Entwickelungen, die wenigstens bei eindeutiger conformer Transformation der Fläche invariant sind. Das ist die ganze Lehre von den auf der Fläche existirenden Potentialen und Functionen, ferner von den Moduln der Fläche etc.

Viel enger ist die Gruppe von Aenderungen, bei denen die Definition der *Formen* $\underline{T}_\varrho$, insbesondere die Eigenschaft gewisser Formen $K_0, K_1, \dots K_{m-1}$ eine *Minimalbasis* zu bilden, unverändert bleibt. Letztere ruhte ja darauf, daſs man jedes T durch die K in der Gestalt darstellen konnte:

$$\underline{T}_\varrho = g_0(z_1, z_2).K_0 + g_1(z_1, z_2).K_1 + \dots\dots g_{m-1}(z_1, z_2).K_{m-1}$$

und wir werden bei ihr die z_1, z_2 nur so abändern dürfen, daſs nicht nur jedes T ein $\underline{T}$ bleibt, sondern auch jedes g ein g. *Da ist die Gruppe von Aenderungen, über die wir werden verfügen dürfen, die lineare*:

$$z_1' = \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2,$$
$$z_2' = \beta_1 z_1 + \beta_2 z_2.$$

Wenn wir dagegen auf das Weitergelten der zunächst gewählten Minimalbasis kein Gewicht legen, sondern nur verlangen, daſs jede Form T_ϱ der Fläche eine ebensolche T_ϱ bleiben soll, so verfügen wir, zum mindesten eventuel, über eine etwas gröſsere Gruppe. Diese gröſsere Gruppe tritt ein, sobald neben z_1, z_2 noch weitere lineare Formen auf der Fläche existiren. Mögen dieselben mit $z_3, z_4, \dots z_n$

bezeichnet sein. Die Definition der T_ρ auf der Fläche (will sagen der „Normalgruppen" ρ^{ten} Grades, in denen dieselben verschwinden) wird ~~dann~~ sich nicht ändern, wenn wir x_1, x_2 durch irgend zwei Linearformen:

$$x_1' = \alpha_1 x_2 + \ldots\ldots \alpha_n x_n$$
$$x_2' = \beta_1 x_1 + \ldots\ldots \beta_n x_n$$

ersetzen. –

Ich will nun dreierlei Anwendungen der bisher entwickelten Theorie besprechen, die ich so ordne, daſs ich diejenige voranstelle, welche bei der kleinsten Gruppe von Umänderungen invariant ist.

Es sind dies

A) Anwendung auf die Theorie der Minimalflächen,
B) Anwendung auf die Theorie der algebraischen Gleichungen;
C) Anwendung auf die Theorie der algebraischen Curven (in beliebig ausgedehnten Räumen).

Hierzu habe ich zunächst folgende Bemerkungen zu machen:

ad A). Von der Beziehung zur Theorie der Minimalflächen haben wir schon oben beiläufig gesprochen. Der Grundgedanke dabei ist, die Minimalfläche durch „parallele Normalen" auf eine

Kugel zu beziehen, und auf dieser die complexe Variable z zu interpretiren. Die Theorie bleibt ungeändert (die einzelne Minimalfläche bleibt mit sich selbst congruent), wenn man die Kugel beliebig um ihren Mittelpunkt dreht. Die zugehörige Gruppe der Aenderungen ist also hier, nach bekannten Entwickelungen, durch die Formel gegeben:

$$z' = \frac{(d+i\,a)z + (b+i\,c)}{(-b+i\,c)\,z + (d-i\,a)},$$

in welcher die a, b, c, d reelle Constante bedeuten.

ad. β). Die Theorie der algebraischen Gleichungen kommt hier insofern in Betracht, als wir in der Gleichung

$$f(s,z) = 0$$

z als eine „bekannte" Gröſse, s als eine „unbekannte" auffaſsen können und nun verlangen können, diese Unbekannte s zu bestimmen. Wie verbindet sich der Apparat, der in der Theorie der algebraischen Gleichungen entwickelt wird: die Lehre von der Tschirnhaustransformation, von der Resolventenbildung etc. mit der Betrachtung der über der z-Ebene ausgebreiteten, zu $f(sz) = 0$ zugehörigen algebraischen Gleichung? Die Beziehungen, welche sich dabei ergeben, werden durchweg gegenüber der allgemeinen *linearen Gruppe:*

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$$

invariant sein.

Ad C). Wieder setzen wir voraus, es mögen auf der Fläche neben einander die linearen Formen $z_1, z_2, \cdots z_n$ bestehen. Die mehrblättrige Fläche über der z-Ebene kommt hervor, indem wir $z_1 : z_2$ geometrisch interpretiren. Wir können nach der in der analytischen Geometrie üblichen Redeweise, die zwischen reell und imaginär nicht ausdrücklich unterscheidet, vielmehr die von den reellen Vorkommniſsen herstammende Terminologie schlechtweg für alle Vorkommniſse gebraucht, auch so sagen: daſs die geometrische Interpretation von $z_1 : z_2$ auf der z-*Axe* geschieht und dabei das algebraische Gebilde in eine *mehrfache Ueberdeckung* dieser Axe verwandelt wird. Unser neuer Ansatz ist jetzt, daſs wir nicht gerade $z_1 : z_2$ als homogene Coordinaten auf einer Axe, sondern $z_1 : z_2 : z_3$ als homogene Coordinaten in der Ebene, $z_1 : z_2 : z_3 : z_4$ als homogene Coordinaten im Raume von 3 Dimensionen, etc. etc. interpretiren. Es erscheint dann unser algebraisches Gebilde (im Sinne der bezeichneten Redeweise) als Curve der Ebene, oder als Curve des $R_3, R_4, \ldots R_{n-1}$. Diese Curve werden wir selbstverständlich im Sinne der projectiven Geometrie des sie tragenden Raumes untersuchen wollen. Das kommt darauf hinaus, daſs wir als zugehörige Gruppe jenachdem die Gesammtheit der linearen Substitutionen von x_1, x_2, oder von x_1, x_2, x_3 resp. x_1, x_2, x_3, x_4 etc. etc. zu betrachten haben werden.

So. 16. I 92

A Näheres über Minimalflächen

Wir beginnen mit gewiſsen Erläuterungen über Differentiiren und Integriren mit homogenen Variabelen. Einfache Differentiation, bez. Integration ist uns bereits immerzu in der Form entgegengetreten:

$$f_0(x_1, x_2) = \int \Phi_{-2}(x_1, x_2)\,[x\,dx],$$

wo das Integral f_0 eine Form nullter Dimension, der Integrand Φ_{-2} eine Form $(-2)^{\text{ter}}$ Dimension ist. Der tiefere Grund dieser Formel liegt darin, daſs man neben dem selbstverständlichen: $df = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2$ vermöge des Euler'schen Theorems die andere Formel hat: $x_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial f}{\partial x_2} = 0$, vermöge deren wir $\frac{\partial f}{\partial x_1} = -x_2\Phi$, $\frac{\partial f}{\partial x_2} = x_1\Phi$ setzen dürfen. Hieraufhin ergeben sich dann folgende Formeln für zweifache Differentiation, bez. Integration. Wir nehmen eine Form 1ten Grades als Ausgangspunkt:

$$f_1(x_1, x_2)$$

und beachten, daſs ihre beiden Differentialquotienten

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_2}$$

homogen nullter Dimension sind. Letzteres giebt uns vermöge des Euler'schen Theorems:

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1^2} = -x_2^2\, \Phi_{-3}, \quad \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1 \partial x_2} = x_1 x_2\, \Phi_{-3}, \quad \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_2^2} = -x_1^2\, \Phi_{-3}.$$

und also

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = \int x_2\, \Phi_{-3}(x_1, x_2)(x\,dx), \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \int -x_1\, \Phi_{-3}(x_1, x_2)(x\,dx),$$

d.h.

$$f_1 = x_1 \int x_2\, \Phi_{-3}(x_1, x_2)\cdot(x\,dx) - x_2 \int x_1\, \Phi_{-3}(x_1, x_2)\cdot(x\,dx),$$

so daſs also hier f_1 und die Form (-3)ten Grades Φ_{-3} in bestimmten Zusammenhang gesetzt sind. – Analog wird dann bei dreifacher Differentiation f_{+2} mit Φ_{-4} in Beziehung treten. Ich unterdrücke hier die Zwischenformeln und gebe nur das Resultat. Wir haben einerseits:

$$\frac{\partial^3 f_2}{\partial x_1^3} = -x_2^3\, \Phi_{-4}, \quad \frac{\partial^3 f_2}{\partial x_1^2 \partial x_2} = +x_2^2 x_1\, \Phi_{-4}, \quad \frac{\partial^3 f_2}{\partial x_1 \partial x_2^2} = -x_2 x_1^2\, \Phi_{-4}, \quad \frac{\partial^3 f_2}{\partial x_2^3} = +x_1^3\, \Phi_{-4}$$

andererseits:

$$2 f_2 = x_1^2 \int + x_2^2\, \Phi_{-4}(x\,dx) + 2 x_1 x_2 \cdot \int - x_1 x_2\, \Phi_{-4}(x\,dx) + x_2^2 \cdot \int + x_1^2\, \Phi_{-4}(x\,dx).$$

Die hiermit festgelegten Zusammenhänge zwischen f_1 und Φ_{-3}, resp. zwischen f_2 und Φ_{-4} werden bei Nichtgebrauch homogener Variabler, d.h. wenn man x_2 einfach $= 1$, $dx_2 = 0$ setzt, die gewöhnliche Ausdrucksweise finden:

$$\Phi_{-3} = -\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1^2}, \text{ d.h. } f_1 = -\iint \Phi_{-3} \cdot dx_1,$$
$$\Phi_{-4} = -\frac{\partial^3 f_2}{\partial x_1^3}, \text{ d.h. } f_2 = -\iiint \Phi_{-4} \cdot dx_1;$$

die f entstehen also für die gewöhnliche Anschauungsweise aus den Φ durch *mehrfache Integration.* Die homogenen Formeln, in denen die mehrfachen Integralzeichen nicht hintereinander, sondern nebeneinander geschrieben erscheinen, ergeben sich von hieraus natürlich durch partielle Integration. Für unseren functionentheoretischen Ansatz aber ergiebt sich aus diesen Formeln eine bestimmte Verallgemeinerung. Wir haben bisher auf unseren Riemann'schen Flächen neben den *algebraischen Formen* diejenigen *transcendenten Formen nullten Grades* studirt, die sich aus den algebraischen Formen $(-2)^{\text{ter}}$ Dimension durch einfache Integration ergeben:

$$f_0 = \int \Phi_{-2}(x\,dx),$$

d.h. eben die „Integrale" der Riemann'schen

Fläche.

Jetzt werden wir daneben transcendente Formen ersten, bez. zweiten Grades, f_1 und f_2 studieren, welche sich aus den Φ_{-3} resp. Φ_{-2} vermöge zweier bez. dreier Integralgleichen ergeben. Machen wir auf der Riemann'schen Fläche einen Umgang, so wächst f_0 um einen constanten Periodicitätsmodul C_0, d.h. um eine rationale ganze Form nullten Grades, f_1 aber und f_2 wachsen offenbar um Ausdrücke $C_1 x_1 + C_2 x_2$, bez. $C_1 x_1^2 + 2 C_2 x_1 x_2 + C_3 x_2^2$, d.h. um rationale ganze Formen ersten, bez. zweiten Grades.

Hierin liegt dann die Eigenthümlichkeit der neuen Transcendenten, die man nun ebenso ausführlich wird untersuchen dürfen, wie dies bisher ausschliesslich mit den f_0 geschah. —

In dem so erweiterten Gebiete bewegen sich nun die Formeln für die Minimalflächen, die wir jetzt kennen lernen müssen. Es sind dies, von der homogenen Gestalt abgesehen, keine anderen als die Formeln, welche Weierstrass in den Berliner Monatsberichten von 1866 aufgestellt hat. In der geometrischen Interpretation dieser Formeln folgen wir Lie.

Wir beginnen daher mit solchen Formeln, welche im Raume der rechtwinkeligen Coordinaten ξ, η, z eine „Minimalcurve" darstellen, d.h. eine Curve

$$\xi = \varphi(s),\ \eta = \psi(s),\ \zeta = \chi(s),$$

deren Tangente unausgesetzt den Kugelkreis schneidet, so daſs also

$$\varphi'^2 + \psi'^2 + \chi'^2 = 0 \text{ ist.}$$

Wir erhalten eine derartige Minimalcurve einfach, indem wir schreiben:

$$(1)\ \xi + i\eta = \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1^2},\ \xi - i\eta = -\frac{\partial^2 f_2}{\partial x_2^2},\ \zeta = \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1 \partial x_2},$$

unter f_2 eine beliebige Form zweiten Grades von x_1, x_2 verstanden. Wir haben nämlich daraufhin sofort auf Grund der eben mitgetheilten Formeln:

$$d(\xi + i\eta) = \frac{\partial^3 f_2}{\partial x_1^3}\, dx_1 + \frac{\partial^3 f_2}{\partial x_1^2 \partial x_2}\, dx_2 = x_2^2 \cdot \Phi_{-4} \cdot (x\, dx).$$

$$d(\xi - i\eta) = -x_1^2 \cdot \Phi_{-4} \cdot (x\, dx),\quad d\zeta = -x_1 x_2 \cdot \Phi_{-4} \cdot (x\, dx).$$

daraus folgt:

$$d(\xi + i\eta) \cdot d(\xi - i\eta) + d\zeta^2 = 0,$$

d.h.

$$d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 = 0.$$

Zugleich dürfen wir die Formeln (1) in die Gestalt setzen:

$$(2)\ (\xi + i\eta) = \int x_2^2 \Phi_{-4} \cdot (x\, dx),\ (\xi - i\eta) = -\int x_1^2 \cdot \Phi_{-4} (x\, dx),\ \zeta = -\int x_1 x_2 \Phi_{-4} \cdot (x\, dx).$$

Daſs die so erhaltenen Formeln aber auch in der Lage sind, jede Minimalcurve darzustellen, sieht man, wenn man die ganz. Entwickelung umdreht. In der That haben wir bei jeder Minimalcurve

$$d(\xi+i\eta)\cdot d(\xi-i\eta)+d\zeta^2=0,$$

so daſs wir setzen dürfen:

$$d(\xi+i\eta)=\lambda_2^2\cdot\Phi_{-4},\quad d(\xi-i\eta)=-\lambda_1^2\,\Phi_{-4},\quad d\zeta=-\lambda_1\lambda_2\cdot\Phi_{-4},$$

wo der Parameter $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ durch die Doppelformel definirt ist:

$$\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)=\frac{d(\xi-i\eta)}{d\zeta}=-\frac{d\zeta}{d(\xi+i\eta)}.$$

Hieran knüpft die geometrische Interpretation dieses λ, sobald wir $d\xi:d\eta:d\zeta$ (durch welche zunächst die Richtung der Tangente der Minimalcurve festgelegt wird) als homogene Coordinate des Punctes der ∞ fernen Ebene gelten laſsen, in welchem diese Tangente einschneidet. Die Gleichung:

$$d\xi'+dy^2+d\zeta^2=0$$

ist dann einfach die Gleichung des Kugelkreises und $\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)$ wird *der Parameter, durch welchen man in der Kegelschnittstheorie üblichen Weise den einzelnen Punct des Kegelschnittes festlegt.*

Wieder knüpfen wir hieran eine functionentheoretische Bemerkung. Je nachdem wir f_2 oder Φ_{-4} auf einer vorgelegten Riemann'schen Fläche algebraisch nehmen, wird uns die Formelgruppe (1) eine *der Fläche zugeordnete algebraische Minimalcurve*, oder aber die Formelgruppe (2) *eine der Fläche zugeordnete transcendente Minimalcurve* definiren. Letztere hat dabei die Eigenschaft, allemal, wenn η_1/η_2 über die R. Fläche hin einen geschlossenen Periodenweg beschreibt, eine Verschiebung (Parallel-Verschiebung) zu erleiden; es ist eine *periodische* Minimalcurve.

Wir müſsen jetzt lernen, wie man von den Minimalcurven zu den Minimalflächen schreitet. Dies geschieht durch die Formeln von *Monge*, (die übrigens *Lie* erst in der hier in Betracht kommenden Weise interpretirt hat). Man nimmt einfach zwei Minimalcurven:

$$\xi_1 = \varphi_1(\sigma_1),\ \eta_1 = \psi_1(\sigma_1),\ \zeta_1 = \chi_1(\sigma_1)$$
$$\xi_2 = \varphi_2(\sigma_2),\ \eta_2 = \psi_2(\sigma_2),\ \zeta_2 = \chi_2(\sigma_2)$$

und bildet aus ihnen die „Translationsfläche"

$$\begin{aligned} &\xi = \xi_1 + \xi_2 = \varphi_1(\sigma_1) + \varphi_2(\sigma_2), \\ (3)\qquad &\eta = \eta_1 + \eta_2,\ \zeta = \zeta_1 + \zeta_2. \end{aligned}$$

In der That ist sofort zu sehen, daſs diese Translationsfläche eine Minimalfläche ist. Denn sie ist von unendlich vielen Curven.

$$\xi = \varphi_1(\sigma_1) + C_1,\ \eta = \psi_1(\sigma_1) + C_2,\ \zeta = \chi_1(\sigma_1) + C$$

bedeckt, die sich aus der ersten Minimalcurve durch Parallelverschiebung ergeben (Characteristiken erster Art der Fläche), und andererseits von unendlich vielen Curven (Charakteristiken zweiter Art), welche sich aus der zweiten Minimalcurve durch Parallelverschiebung ergeben.

Da ist es ein bekannter Satz der Flächentheorie, daſs die Haupttangenten der Fläche in einem beliebigen ihrer Punkte harmonisch zu den beiden Characteristiken liegen, die durch den Flächenpunkt hindurchgehen. Aber diese beiden Characteristiken sind hier Minimalcurven, und also stehen die beiden Haupttangenten aufeinander *senkrecht*.

Eben das ist aber bekanntlich das geometrische Kennzeichen der Minimalflächen. —

Bei dieser Erläuterung haben wir geometrisch ganz allgemein operirt, d.h. wir haben die geometrische Ausdrucksweise des Reellen angewandt unbekümmert darum, daſs die vorkommenden Gröſsen t_1, t_2, ξ, η, ζ beliebig complex sein mögen. Wir specificiren nun aber so, daſs wir eine

Minimalfläche mit ∞^2 reellen Puncten (also eine Fläche im elementaren Sinne des Wortes) erhalten, wobei wir dann ausschließlich auf diese reellen Puncte achten wollen. Wir erreichen dies, indem wir in Formel 3) φ_1 und φ_2, ψ_1 und ψ_2, χ_1 und χ_2, endlich t_1 und t_2 beziehungsweise conjugirt imaginär wählen. So kommt man dann zur Darstellung der reellen Puncte einer reellen Minimalfläche: (indem wir das Conjugirtsein in üblicher Weise durch einen horizontalen Strich andeuten):

$$(4)\quad \xi = \varphi(t) + \bar{\varphi}(\bar{t}),\ \eta = \psi(t) + \psi(t),\ \zeta = \chi(t) + \chi(t),$$

(wobei natürlich $\varphi'^2 + \psi'^2 + \chi'^2 = 0$).

Mi. 20.I.92 Wir haben diese Formeln jetzt nur mit den oben gegebenen (1) und (2) zu verbinden, um Weierstraß' Darstellung der reellen Minimalflächen zu haben. Wir bekommen einerseits:

$$(5)\quad \begin{cases} \xi = \mathfrak{R}\left(\dfrac{\partial^2 f_2}{\partial x_1^2} - \dfrac{\partial^2 f_2}{\partial x_2^2}\right), \\ \eta = \mathfrak{R}\left(-i\left(\dfrac{\partial^2 f_2}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 f_2}{\partial x_2^2}\right)\right), \\ \zeta \equiv 2\,\mathfrak{R}\left(\dfrac{\partial^2 f_2}{\partial x_1 \partial x_2}\right), \end{cases}$$

andererseits

$$(6)\quad \begin{cases} \xi = \mathfrak{R}\left(\int (x_2^2 - x_1^2)\,\Phi_{-4}\cdot(x\,dx)\right), \\ \eta = \mathfrak{R}\left(-i\int (x_2^2 + x_1^2)\,\Phi_{-4}\,(x\,dx)\right), \\ \zeta = \mathfrak{R}\left(-2\int x_1 x_2\,\Phi_{-4}\,(x\,dx)\right), \end{cases}$$

(unter R allemal den *reellen Theil* des nebengeschriebenen Arguments verstanden). Wählen wir hier f_2, bez. Φ_{-4} als eine zu einer bestimmten Riemann'schen Fläche gehörige algebraische Form, so haben wir in (5) eine „zur Fläche gehörige" algebraische, in (6) eine ebensolche periodische Minimalfläche.

Denkt man die complexe Variable z in üblicher Weise auf einer Kugelfläche, so ergiebt sich für die vorstehenden Formeln eine besonders einfache Deutung. Man kann das z eines reellen Kugelpunctes als den Parameter der geradlinigen Erzeugenden erster Art ansehen, welche auf der Kugel durch den betr. Punct hindurchläuft; der conjugirte Werth $\bar{z}$ wird dann als ein Parameter für die durch den Kugelpunct laufende Erzeugende zweiter Art betrachtet werden dürfen. Aber beide Erzeugende sind Minimalgerade, d. h. treffen den Kugelkreis, so daſs z und $\bar{z}$ auch als die Parameter zweier Puncte des Kugelkreises angesehen werden können, derjenigen beiden, in denen der Kugelkreis von der Tangentialebene des Kugelpunctes getroffen wird.

Andererseits ist aber klar, daſs der Kugelkreis von der Tangentialebene, die im Puncte z, $\bar{z}$ der

Minimalfläche an die Minimalfläche construirt werden kann, gerade auch in den Puncten x, $\bar{x}$ getroffen wird. Denn die Tangentialebene an die Minimalfläche enthält als Minimalgerade eben die beiden Tangenten der durch den Flächenpunct laufenden Minimalcurven. Daher:

Die Tangentialebenen, welche man an Kugel und Minimalfläche in entsprechenden Puncten construiren kann, sind parallel

oder auch:

Die zwischen Kugel und Minimalfläche bestehende Abbildung wird durch parallele Normalen vermittelt.

Da erkennt man denn sofort, was das für eine mehrblättrige Fläche über der Kugel ist, welche einer gegebenen algebraischen Minimalfläche z. B. entspricht. Man übertrage alle Puncte der Minimalfläche auf entsprechende Kugelpuncte nach dem Gesetz der parallelen Normalen: dann wird die Kugel von den Bildpuncten von selbst (allgemein zu reden) mehrfach überdeckt und der Inbegriff dieser Bildpuncte, das ist die Riemann'sche Fläche über der Kugel, um welche es sich handelt. Zugleich ist ersichtlich, daſs Minimalfläche und Kugel hierbei *conform* aufeinander bezogen sind. Denn die Fortschreitungsrichtungen, welche von einem Punkte der Minimalfläche auf der Minimalfläche auslaufen, sind den Fortschreitungsrichtungen, die vom Kugelpunkte auf der Kugel ausgehen, derartig (eindeutig) zugeordnet, daſs den Minimalrichtungen hier die Minimalrichtungen dort entsprechen, und darin ruht ja gerade das Wesen der conformen Abbildung. Wir haben also in den Formeln (5) eine Methode, um irgend eine die Kugel mehrfach überdeckende Riemann'sche Fläche conform auf eine den Raum durchziehende Minimalfläche zu übertragen, womit wir ein Versprechen eingelöst haben, das wir früher (zu Anfang der Vorlesung,) eingegangen sind.

Es ist leider nicht möglich, länger hier bei den auſserordentlich intereſsanten Fragen zu verweilen, die sich da aufdrängen. Für unsere heutige Kenntniſs des Gegenstandes giebt es eine zusammenfaſsende Darstellung in *Bd. I* von *Darboux's* *Théorie générale des surfaces*. Aber es scheint nützlich, diese Theorie unter functionentheoretischen Gesichtspunkten weiter zu verfolgen, so beispielsweise, daſs man die Gesammtheit der Minimalflächen noch genauer untersucht, welche den *sämmtlichen* auf irgend welcher über der Kugel ausgebreiteten Riemann'schen Fläche existirenden f_2 und Φ_{-4} entsprechen.

B. Excurs über die Theorie der algebraischen Gleichungen.

Die Gleichungstheorie kommt hier insofern in Betracht, als man jede Gleichung:

$$f(\overset{m}{s}, z) = 0,$$

die uns bisher eine m-blättrige Fläche über der z-Ebene definirte, auch so ansehen kann, daſs man s als die „Unbekannte", z als einen „Parameter" betrachtet und fragt, wie man s als Function von z berechnet. Da wird es dann intereſsant, zu verfolgen, wie die Theorie der algebraischen Gleichungen mit der Theorie der Riemann'schen Fläche in Wechselwirkung tritt.

Als *Rationalitätsbereich* der algebraischen Gleichung wählen wir daher zweckmäſsigerweise die Gesammtheit der rationalen Functionen von z (unbekümmert um die Natur der nummerischen Coëfficienten, welche in diesen Functionen auftreten mögen). Wir erkennen dann sofort, daſs unsere Gleichung (in dem so festgelegten Rationalitätsbereiche) *irreducibel* oder *reducibel* ist, je nachdem die zugehörige Riemann'sche Fläche aus einem Stücke zerfällt. Aber mehr, die Galois'sche Gruppe der Gleichung erscheint als die *Monodromiegruppe* der Riemann'schen Fläche d.h. als der Inbegriff derjenigen Vertauschungen der Wurzeln $s_1, \dots s_m$, der hervorkommt, wenn z in seiner Ebene beliebige geschloſsene Wege beschreibt.

Besonders intereſsant scheint es, hier diejenigen beiden Verfahrungsweisen in Betracht zu ziehen die man bei der Auflösung der Gleichung $f(s, {}^{m}z)=0$ zu benutzen pflegt: die *Tschirnhaustransformation* und die *Resolventenbildung*.

a) Die Tschirnhaustransformation besteht bekanntlich darin, daſs man statt s in unserer Gleichung irgend eine rationale Function:

$$t = R(s,z)$$

als neue Unbekannte einführt, wobei man indeſs nur solche t benutzen wird, deren Discriminante bezüglich z nicht identisch verschwindet, weil sonst die Substitution nicht eindeutig umkehrbar wäre. *Augenscheinlich kommt dieser Ansatz einfach darauf hinaus, die Riemann'sche Fläche über der* z-Ebene ganz ungeändert zu laſsen und statt s irgend eine andere zu der Fläche gehörige algebraische Function als neue Unbekannte einzuführen (vergl. p. 102). Da werden wir denn alle die Sätze benutzen können, welche wir über die auf der Fläche existirenden algebraischen Functionen bislang abgeleitet haben. Beispielsweise werden wir (um nur dies Eine zu erwähnen) dann und nur dann wenn das Geschlecht der Fläche gleich Null ist, t so einführen können, daſs es jeden Werth nur in einem Flächenpunkte annimmt, – worauf denn unsere Gleichung die Gestalt erhält:

$$R(\overset{m}{t}) = z.$$

b) Bei der Resolventenbildung handelt es sich bekanntlich darum, eine Function, die irgendwie rational von sämmtlichen Wurzeln $s_1, \dots s_m$ und von z abhängt:

$$\Phi = R(s_1, s_2, \dots s_m; z)$$

als Unbekannte einzuführen. Ein solches Φ wird bei einer bestimmten Untergruppe der Galois'schen Gruppe ungeändert bleiben. Insofern wir zwei Resolventen, welche ihrerseits durch Tschirnhaustransformation aus einander hervorgehen, als gleichwerthig ansehen, werden uns solche Φ gleichwerthige Resolventen ergeben, welche entweder direct zu derselben Untergruppe der Galois'schen Gruppe, oder doch zu gleichberechtigten Untergruppen gehören. Man denke sich nun in diesem Sinne zu $f(\overset{m}{s}, z) = 0$ alle möglichen Arten zugehöriger Resolventen, insbesondere die Galois'sche Resolvente aufgestellt. *Jede Art wird uns dann, über der z-Ebene, eine neue Riemann'sche Fläche definiren, welche aus der zu $f(s, z) = 0$ gehörigen Fläche in bestimmter gesetzmässiger Weise abgeleitet ist.* So kommen wir also dazu, unsere functionentheoretischen Betrachtungen in der Richtung weiter auszubilden, dass wir zu der vorgelegten über der z-Ebene ausgebreiteten Fläche eine Anzahl neuer Flächen assosiiren!

Betrachten wir insbesondere diejenige [So. 23.1.92 Fläche über der z-Ebene welche der *Galois*'schen Resolvente von $f(s, z) = 0$ entspricht. Durch welche geometrische Eigenschaften wird dieselbe ausgezeichnet sein?

Sei N die Anzahl der Vertauschungen der Galois'schen Gruppe. Dann hat die Galois'sche Resolvente natürlich N Wurzeln:

$$\Phi_1, \Phi_2, \ldots\ldots \Phi_N.$$

und wir erhalten eine N blättrige Fläche. Aber das Characteristische der Galois'schen Resolvente ist dabei, daſs

$$\Phi_i = \theta(\Phi, z),$$

d. h. daſs jede Wurzel Φ_i eine rationale Function jeder anderen Φ ist. Wir schlieſsen, *daſs jedes Blatt unserer neuen Riemann'schen Fläche genau so verläuft, bez. mit den anderen zusammenhängt, wie jedes andere,* kurz gesagt, daſs unsere Fläche über der z-Ebene *regulär* ausgebreitet ist. Es schlieſst dies ein, daſs die Verzweigung der Fläche eine reguläre ist, so daſs, wenn für einen Werth von z irgend ν Blätter im Cyclus zusammenhängen, für denselben Werth von z je ν Blätter im Cyclus zusammenhängen. Aber die hiermit bezeichnete Regularität der Verzweigung würde allein noch nicht genügen: es müſsen vermöge dieser Verzweigung solche Zusammenhänge zwischen den Blättern der Fläche hergestellt sein, daſs auch bei Umgängen in der z-Ebene, welche mehrere Verzweigungspunkte umspannen, für alle Blätter je dieselbe Zahl sich cyclisch vertauschen, der Blätter resultirt. Es giebt eine einfache Methode, um sich von der Bauart einer derartigen regulären Fläche – wie überhaupt von dem Aufbau mehr, blättriger Flächen über der z-Ebene – geometrisch Rechenschaft zu geben. Ich ziehe zunächst in der z-Ebene eine sich selbst nicht schneidende geschlossene Curve, welche durch alle Stellen z hindurchläuft, über denen Verzweigungspunkte der Fläche gelegen sind. Diese Curve übertrage ich dann auf alle Blätter der Riemann'schen Fläche, wodurch jedes Blatt in zwei Halbblätter zerlegt erscheint, von denen ich mir der bequemeren Auffassung halber das eine schraffirt, das andere nicht schraffirt denke. Nunmehr verwandele ich unsere Fläche – unter Beibehaltung der Schraffirung durch irgend welchen Prozeſs, also z. B. durch Formeln der Minimalflächentheorie, die wir neulich kennen lernten, in eine nur einfach überdeckte irgendwie den Raum durchziehende geschlossene Fläche. Auf dieser Fläche wird man den aufeinanderfolgenden Halbblättern der ursprünglichen Riemann'schen Fläche entsprechend, *ein Nebeneinander abwechselnd schraffirter und nicht schraffirter Gebiete*, oder, wie wir kurz sagen, *eine Gebietseintheilung* haben, und diese Gebietseintheilung ist es, die uns nun in übersichtlicher Weise den Zusammenhang der früheren Halbblätter wiederspiegelt. Insbesondere, wenn eine reguläre Fläche von N Blättern aufzufaſsen ist, so werden wir eine *reguläre Eintheilung* unserer im Raume gelegenen Fläche in $2N$ abwechselnd schraffirte und nicht schraffirte Bereiche zu treffen haben, eine Aufgabe, die ohne Weiteres geometrisch verständlich ist.

Die geschilderte Maaſsnahme läſst sich, wie wir doch noch hervorheben müſsen, besonders einfach durchführen, wenn die vorgelegte algebraische Gleichung die Gestalt $R(s) = z$ hat, so daſs jedem Werthe s nur ein Punkt der in Betracht kommenden Riemann'schen Fläche entspricht. Als die den Raum durchziehende einfach überdeckte Fläche kann dann die s-Ebene (oder s-Kugel) selbst genommen werden. So ist es, um das allereinfachste Beispiel zu nennen, bei der reinen Gleichung $s^N = z$, so ist es überhaupt bei den Gleichungen der „regulären Körper". Man nehme etwa, um nur dieses zu nennen, die Ikosaëdergleichung. Da hat man zunächst über der z-Ebene eine 60-blättrige Fläche, deren Blätter bei $z = 0$ zu je 3, bei $z = 1$ zu je zwei, bei $z = \infty$ zu je fünf im Cyclus zusammenhängen. Als einfachsten Absonderungsschnitt wird man hier in der z-Ebene die Axe der reellen Zahlen nehmen, also die z-

Ebene in eine positive und eine negative Halbebene zerlegen, von denen wir etwa die erstere schraffiren.

Nun machen wir die Uebertragung auf die s-Kugel. Da bekommen wir der Dreizahl der Verzweigungsstellen entsprechend eine Eintheilung in lauter Dreiecke: 60 schraffirte und 60 nicht schraffirte Dreiecke, von denen bald 2.3, bald 2.2, bald 2.5 in einem Kugelpunkte zusammenstoſsen, Alles regulär geordnet, wie es die bekannte Ikosaëderfigur aufweist. Ich darf zufügen, daſs diese geometrischen Maaſsnahmen, wie überhaupt die Ueberlegungen über die Zusammengehörigkeit Galois'scher Sätze und Riemann'scher Constructionen, zum ersten Male im 14ten Annalenbande 1878 entwickelt worden sind; in ausführlicherer Gestalt findet man dann diese Dinge in Band I der Vorlesungen über elliptische Modulfunctionen. Besonders zu nennen ist hier ferner die Dissertation von *Dÿck* (München 1879), die in neugearbeiteter Form in Bd. 17 der Annalen erschien (1880), (vgl. dazu die Bemerkung in Bd. 20 der Annalen, p 30). Dÿck sucht *alle* Möglichkeiten, eine geschlossene Fläche vom Geschlechte $p = 0$ oder 1, 2, 3 regulär einzutheilen. Der hiermit bezeichneten Fragestellung entspricht, daſs wir nicht nur über der z-Ebene, sondern über irgendwelcher geschloſsenen Fläche die wir als Substrat nehmen mögen, regulär verlaufende Flächen in Betracht ziehen. Die hierin liegende Verallgemeinerung können wir natürlich auf die Theorie der algebraischen Gleichungen übertragen. Wir dürfen dann nur nicht mit Gleichungen $f(s,z)=0$ beginnen, d.h. mit Gleichungen, welche neben der Unbekannten s den Parameter z ausschlieſslich rational enthalten, sondern wir müſsen allgemeiner schreiben $f(s,\sigma,z)=0$, wo σ und z, die beide in f rational auftreten, ihrerseits durch eine algebraische Gleichung $\varphi(\sigma,z)=0$ verbunden sein sollen. Uebrigens sind die Flächen, welche über einer vorgegebenen Riemann'schen Fläche (σ,z) irgendwie regulär ausgebreitet sind, keine anderen als diejenigen, welche man sonst wohl *als Flächen mit einer Gruppe eindeutiger Transformationen in sich selbst* bezeichnet. Als solche sollen sie zu Anfang des Sommersemesters noch ausführlich betrachtet werden.

Noch sei bemerkt, daſs mit den hier besprochenen Untersuchungen neuere Publicationen von *Kronecker* und seinen Schülern, *Netto*, *Hensel*, *Runge* in enger Beziehung stehen. Der Unterschied ist nur, daſs die genannten Herren zunächst nicht den Blätterzusammenhang der Riemann'schen Fläche im allgemeinen Sinne des Wortes in Betracht ziehen, sondern nur die Verzweigung (den Zusammenhang) um die einzelnen Verzweigungspunkte). Diese findet dann in der früher geschilderten Weise ihren Ausdruck in Angaben über die Discriminante sei es der vorgelegten Gleichung oder Gleichungen, sei es irgendwelcher aufzustellenden Resolvente. –

So. 30. 1. 92.

3. Beziehung der Riemann'schen Theorie zur Theorie der algebraischen Curven.

Früher haben wir bereits den Ansatz gegeben, der von der Riemann'schen Fläche zur Geometrie der algebraischen Curven hinüberleitet. Wir nehmen irgendeine algebraische Function der Fläche z, in Betracht, die m-werthig sei, und durch welche die Fläche also auf die m-fach überdeckte z-Ebene oder, was daſselbe besagen soll, auf die m-fach überdeckte z-Axe abgebildet wird. Jetzt spalten wir z in $\frac{z_1}{z_2}$. So kann es sein, daſs neben den so gewonnenen z_1, z_2 noch andere linear, unabhängige Formen auf der Fläche vorhanden sind, sagen wir $z_3, z_4, \ldots z_\nu$ (die hier auftretende Zahl ν bestimmt sich, wie wir früher sahen, aus dem Riemann-

- Roch'schen Satze). Statt dann nur $z_1 : z_2$, „geometrisch" zu interpretieren und damit das algebraische Gebilde auf den „R_1" zu beziehen, können wir, jenachdem wir wollen, auch $z_1 : z_2 : z_3$ oder $z_1 : z_2 : z_3 : z_4$ etc. in Betracht nehmen und das Gebilde dadurch auf eine Curve des „R_2", des „R_3" etc. abbilden. Diese Curve wird von den Bildpunkten des Gebildes je nach der Auswahl der $z_1 : z_2 : z_3$ .... einfach oder mehrfach überdeckt sein. Indem wir als „Ordnung" derselben die Anzahl von Punkten bezeichnen, in denen unsere mit der richtigen Multiplicität gezählte Curve von einer beliebigen Geraden des R_2, resp. einer beliebigen Ebene des R_3 etc. geschnitten wird, werden wir sagen müſsen, *daſs unsere Curve allemal von der m^{ten} Ordnung sei*. Denn eine beliebig lineare Form $a_1 z_1 + a_2 z_2$, $a_1 z_1 + a_2 z_2 + a_3 z_3$, . . . verschwindet auf der Riemann'schen Fläche doch in m beweglichen Punkten.

So bekommen wir also *Curven m^{ter} Ordnung im R_1, R_2 . . . $R_{\nu-1}$*, als ebensoviele „Erscheinungsformen" unseres algebraischen Gebildes, und haben nun zuzusehen, *wie die geometrischen Eigenschaften dieser Curven mit den uns bereits* bekannten functionentheoretischen Eigenschaften des algebraischen Gebildes zusammenhängen. –

Beispiele:

a) Ich nehme $p = 0$ und x als eine einwerthige Function auf der Fläche. Jetzt setze ich $z = x^m$. Spalten wir dann z in $\frac{z_1}{z_2}$, so dürfen wir schreiben $z_1 = x_1^m$, $z_2 = x_2^m$. Da sieht man, daſs neben z_1, z_2 noch eine ganze Reihe linearer Formen existiren:

$$z_3 = x_1^{m-1} x_2,\ z_4 = x_1^{m-2} x_2^2,\ \ldots\ldots z_{m+1} = x_1 x_2^{m-1}$$

wählen wir jetzt

$$z_1 : z_2 : z_3 : \ldots\ldots z_{m+1} = x_1^m : x_2^m : \ldots\ldots$$

als homogene Coordinaten des R_m, so beziehen wir das Gebilde damit auf diejenige rationale Raumcurve, welche man die *Normcurve* des R_m zu nennen pflegt!

b) Ich denke mir über der x-Ebene, in dem ich $\sqrt{f_{2p+2}(x_1 x_2)}$ gegeben ansehe, irgend eine hyperelliptische Fläche vom Geschlechte p gegeben. Ich erfahre übrigens genau wie vorhin, nur daſs ich m ausdrücklich kleiner als $(p+1)$ nehmen will, damit bei der Bildung der linearen Formen z_3, $z_4 \ldots$ die Quadratwurzel $\sqrt{f_{2p+2}}$ nicht mit in Betracht zu ziehen ist. Indem ich dann $\varkappa_1 : \varkappa_2 : \ldots$ wieder geometrisch interpretire, bekomme ich abermals die Normalcurve des R_m. Aber indem wir jetzt neben den rationalen Functionen der $\varkappa$ die $\sqrt{f_{2p+2}}$ als bekannt ansehen, *haben wir uns diese Normcurve doppelt überdeckt vorzustellen.*[*]

c) Setzen wir im vorigen Beispiele m insbesondere $= p-1$, so verhalten sich die $\varkappa_1 : \varkappa_2 : \varkappa_3 : \ldots$ wie die zum hyperelliptischen Gebilde gehörigen Formen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_p$ der ersten Gattung. Wir können also sagen: *daſs die Curve der φ im hyperelliptischen Falle eine doppeltüberdeckte Normcurve des R_{p-1} vorstellt.* Allgemein wird die Curve der φ eine Curve $(2p-2)^{\text{ter}}$ Ordnung des R_{p-1} sein, indes ist leicht aus dem Riemann-Roch'schen Satz abzuleiten, daſs diese Curve immer, den hyperelliptischen Fall allein ausgenommen, nur einfach ü, berdeckt ist. Die so hervorkommende C_{2p-2} des R_{p-1} ist diejenige Normalcurve (Normalcurve der φ), an welcher wir weiterhin die Eigenschaften der algebraischen Gebilde von höherem p am liebsten studiren werden.

---

[*] Die beiden „Ueberdeckungen" hängen in den Punkten $f = 0$ zusammen", also in den Punkten, welche die Verzweigungspunkte der ursprünglichen zweiblättrigen Fläche ausmachen.

Es ist wohl kaum nöthig, auszuführen, daſs wir solcherweise von den Riemann'schen Flächen aus alle überhaupt existirenden algebraischen Curven bekommen.

Dagegen möchte ich schon hier darauf aufmerksam machen, daſs wir dabei von selbst zu gewiſsen Auffaſsungen betr. algebraische Curven kommen, welche der gewöhnlichen geometrischen Betrachtung fern liegen oder doch erst in den letzten Jahren entwickelt worden sind.

Dahin gehört bereits die Idee, mehrfach überdeckte Curven Objecte der geometrischen Betrachtung gelten zu laſsen, was dann zur Folge hat, daſs alle Aussagen, die man sonst über m-blättrige Flächen über der z-Ebene macht, jetzt auf die Curven m^{ter} Ordnung des R_1 bezogen werden können.

Dahin gehört ferner die Idee, die Curven des

$R_1, R_2, \dots R_{\nu-1}$, welche durch Nebeneinanderstellung von $x_1, x_2, x_3, \dots x_\nu$ beziehungsweise entstehen, als zusammengehörig zu betrachten. Wir werden die Curve des $R_{\nu-1}$, weil bei ihr das volle System der Linearformen $x_1, \dots x_\nu$ benutzt wird, eine *Vollcurve* nennen, die Curven der niederen Räume aber *Theilcurven*. Die Theilcurven ergeben sich aus der Vollcurve, indem man gewisse x weglässt. Das heisst geometrisch: *Die Theilcurven der niederen Räume ergeben sich aus der Vollcurve des $R_{\nu-1}$, indem man letztere auf die niederen Räume* projicirt. Die Projection ist dabei eine solche, bei der sich die Ordnung der Curve nicht ändert, was wieder in geometrischer Weise ausgesprochen werden kann.

Dann aber folgende Bemerkung: Die Geometer untersuchen auf den Curven des $R_2, R_3, \dots$ auf das Ausführlichste die rationalen Formen der x: $F_\varrho(x_1, x_2, x_3, \dots)$. Wie vieler solcher Formen ϱ^{ten} Grades werden für die Curve identisch verschwinden, wie viele „auf der Curve" unterschiedene F_ϱ also zu unterscheiden sein? Hierauf dann gründen sie ihre „Schnittpunktsätze" ihren Begriff der „Residualität" etc. etc. — Demgegenüber wird für uns gegeben sein, dass wir nicht die Gesammtbei den $\mathcal{T}_\varrho$, sondern überhaupt alle zu der Curve gehörigen *algebraischen Formen T_ϱ* in Betracht ziehen (wobei die Definition der T_ϱ keine andere sein wird, als früher, bei der Einführung der Formentheorie, auf der m-blättrigen Fläche). Die Zahl dieser T_ϱ haben wir früher nach dem Riemann'-Roch'schen Satz festgelegt, und an sie dann den Begriff der Residualität etc. und die Lehre von der Darstellung der Functionen angeknüpft.

Welches ist nun die Beziehung zwischen den T_ϱ und den $\mathcal{T}_\varrho$? Da müſsen wir auf den Satz über die *Minimalbasis* zurückgreifen, den wir für die mehrblättrige Fläche über der x-Ebene, d.h. für die Curve des R, aufgestellt haben. Statt $\mathcal{T}_\varrho(x_1, x_2)$ schrieben wir damals $g_\varrho(x_1, x_2)$. Es gelang uns dann m solche algebraische Formen

$$K_0, K_1, \ldots\ldots K_{m-1}$$

auszusuchen, daſs sich jedes T_ϱ in der Gestalt darstellen lieſs:

$$T_\varrho = g^{(0)}(x_1, x_2) \cdot K_0 + g^{(1)}(x_1, x_2) \cdot K_1 + \ldots g^{(m-1)}(x_1, x_2) \cdot K_{m-1}$$

Dabei war K_0 eine Constante, und unter den $K_1, K_2, \ldots$ traten jedenfalls alle die linearen Formen $x_3, x_4, \ldots x_\nu$ auf, die neben x_1, x_2 in Betracht kommen mögen.

Wird es möglich sein, diesen Satz auf die Curven der höheren Räume zu übertragen? Wird es beispielsweise bei ebenen Curven m^{ter} Ordnung immer möglich sein eine Anzahl zugehöriger algebraischer Formen

$$\Lambda_0, \Lambda_1, \Lambda_2, \ldots$$

so auszuwählen, dass sich jedes I in der Gestalt darstellt:

$$I = g^0(x_1, x_2 x_3) \cdot \Lambda_0 + g^1(x_1, x_2 x_3) \cdot \Lambda_1 + \ldots ?$$

Der ursprüngliche Satz von der Minimalbasis der R_i sagt bereits, dass das sicher immer geht, und dass man dabei höchstens $(m-1)$ Formen Λ gebraucht. Denn der Unterschied ist doch nur, dass wir jetzt die Form x_3, welche früher unter den K figurirte (vielleicht gleich K_1 war) nun mitunter die Argumente der g aufgenommen haben. Aber es ist nicht ersichtlich, *dass die Anzahl der Λ auf $(m-1)$ steigen muss.* Beispiele lehren vielmehr, dass in dieser Hinsicht verschiedene Möglichkeiten vorliegen, *so dass mit unserem Ansatz zugleich eine Eintheilung der ebenen algebraischen Curven (unähnlich der Curven in höheren Räumen) gegeben ist.*

Die einfachsten Curven im Sinne dieser Eintheilung werden natürlich diejenigen Curven des R_2, R_3, ... sein, bei denen das System der Λ aus der einzigen Form Λ_0 = Const. besteht, bei denen sich also die T mit den g decken, bei denen die x, wie man sich wohl ausdrückt, ein volles Formensystem bilden. Ich habe diese Curven elementare Curven genannt. In seiner Dissertation zeigt Hr. White (1890), dass die einfach überdeckten ebenen Curven ohne Doppelpunkt, wie die einfach überdeckten, doppelpunktsfreien Raumcurven, die der volle Schnitt zweier Flächen sind, elementare Curven sind. Das ist natürlich ein Satz, der seitens der Geometer immer als selbstverständlich angesehen wurde, wie ja überhaupt in der analytischen Geometrie Vieles richtig gemacht worden ist, ohne dass man die vollen Beweisgründe für die Richtigkeit zur Hand gehabt oder sich völlig klar gemacht hätte.

Dass aber nicht alle ebenen Curven Elementarcurven sind, zeigt z. B. eine ebene Curve 4. Ordnung $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ mit 2 Doppelpunkten. Wir legen durch die Doppelpunkte eine Gerade, $\pi = 0$, und einen Kegelschnitt Λ. So erweist sich $\frac{\Lambda}{\pi}$ als eine lineare algebraische Form T_1, ohne eine lineare rationale Form der x_1, x_2, x_3 zu sein.

Daſs sie letzteres in der That nicht ist folgt sofort aus dem Nötherschen Fundamentalsatz der ebenen Curven.

Wollen wir doch die Bedeutung, welche der Nöther'sche Fundamentalsatz für die hier vorliegende Auffaſsung besitzt, etwas näher kennzeichnen!

Mi: 3.2.92 Beim Nöther'schen Satz handelt es sich zunächst um eine Fragestellung, die sich auf ganze rationale ternäre Formen bezieht. Es seien drei solcher Formen f, φ, ψ; wann kann ich setzen:

$$f = A\varphi + B\psi,$$

unter A, B gleichfalls ganze rationale ternäre Formen verstanden? Der bequemen Ausdrucksweise wegen führe man geometrische Sprechweise ein; wir haben dann drei „Curven" $f = 0$, $\varphi = 0$, $\psi = 0$ in Betracht zu ziehen, und können das Resultat (eben den Nötherschen Fundamentalsatz) dahin aussprechen, daſs die Curve f mit ihren Coëfficienten einer Reihe linearer Bedingungen zu genügen hat, von denen sich je eine Serie auf den einzelnen Schnittpunkt der Curven $\varphi = 0$, $\psi = 0$ bezieht. Diese Bedingungen sagen vor allen Dingen aus, daſs $f = 0$ durch jeden gemeinsamen Punkt von $\varphi = 0$ und $\psi = 0$ mit einer gewiſsen Multiplicität hindurchgehen muſs; sie sind aber, sobald es sich um vielfache Schnittpunkte von $\varphi = 0$ und $\psi = 0$ handelt, durch diese Angabe noch nicht erschöpft, sondern es treten dann (für die Coëfficienten von f) noch weitere lineare Bedingungen hinzu, welche sich nur schwer in Worte faſsen laſsen. Vergleiche *Nöther* in Ann. 2 und 6, *Bacharach's* Diſsertation von 1891 (Erlangen), *Voſs*, Annalen 27, *Stickelberger und Nöther*, Ann. 30, *Bertini und Nöther*, Ann. 34.

Wie werden wir nun diesen Satz auffaſsen? Es wird uns nur insoweit intereſsiren, als wir $\varphi = 0$ setzen, d. h. nur so weit, als er sich auf algebraische Functionen auf $\varphi = 0$ bezieht. Es handelt sich dann um die Gleichung $\frac{f}{\psi} \equiv B \pmod{\varphi}$.

Da steht linker Hand der Quotient zweier rationaler ganzen Formen, wir können sagen: der Quotient zweier Formen $g : \frac{g_1}{g_2}$, rechter Hand aber eine ebensolche Form, sagen wir g_3. Die Frage ist also: *wann können wir einen Quotienten zweier g einem neuen g gleich setzen?*

Hierzu gehört dann natürlich, daſs g_1/g_2 auf $\varphi = 0$ überhaupt eine *ganze* Form, also eine T sei:

das ist es, was durch die zuerst auftretenden Bedingungen ausgesprochen wird, die sich auf die „Multiplicität" beziehen, mit welcher die „Curve" $f=0$ durch jeden „Schnittpunkt" von $\varphi=0$, $\psi=0$ hindurchlaufen soll. Aber nun kommen die weiteren Bedingungen, und die müssen offenbar dieses bedeuten, *daß unsere T eine g wird*. Indem wir hierauf alles Gewicht legen, werden wir sagen dürfen, daß der Nöther'sche Satz geradezu darauf hinausläuft, zu untersuchen, *wann (auf $\varphi=0$) eine in der Gestalt* g_1/g_2 *gegebene T eine g ist.* Der Satz bestätigt also, daß keineswegs jede T eine g zu sein braucht, und giebt uns einen Ansatz, um für die Curve $\varphi=0$ die Minimalbasis der zugehörigen T wirklich aufzustellen.

Wollen wir doch betreffs der verschiedenen Curven, die wir im R_1, R_2, $R_3 \ldots$ zu einer gegebenen Riemann'schen Fläche hinzuconstruiren mögen, noch zwei Fragen stellen:

a) Wir wollen erstlich fragen, wie die Coordinaten $x_1, x_2, \ldots x_\nu$ der einen Curve mit den Coordinaten $x_1', x_2' \ldots x_\nu'$ der anderen Curve analytisch zusammenhängen mögen.

b) Wir wollen zweitens einige Bemerkungen darüber machen, wie man nun auf jeder einzelnen dieser Curven alle die algebraischen Functionen und Integrale, die wir in abstracto auf der Riemann'schen Fläche haben kennen lernen, zur analytischen Darstellung bringen kann.

Ad a) werden wir bequemer Weise die „Punktgruppen" der Riemann'schen Fläche hervorziehen, welche einerseits auf der Curve der x, die wir C_m nennen, durch die zugehörigen algebraischen Formen ersten, zweiten, … Grades, d.h. durch die $T_1, T_2, \ldots$ festgelegt werden, andererseits auf der Curve der x' die wir $C_{m'}$ nennen, durch die zugehörigen $T_1', T_2', T_3', \ldots$ Erstere Punktgruppen werden wir „Normalgruppen" der C_m nennen, letztere Normalgruppen der $C_{m'}$. Da ist es nun im Allgemeinen ausgeschlossen, daſs die Normalgruppen der $C_{m'}$ unter den Normalgruppen der C_m enthalten sein sollen, oder umgekehrt: es müſste ja sonst m jedenfalls ein Theiler von m' sein, oder umgekehrt, und auch das würde, wie unnöthig ist auszuführen, noch keineswegs ausreichen. Daher der Grundsatz: *Man kann im Allgemeinen weder die $x', \ldots x'_{\mu'}$ irgend welchen Formen T_ϱ, noch die $x, \ldots x_\mu$ irgend* *welchen Formen T'_ϱ, gleich setzen; vielmehr muss man sich darauf beschränken, zu fragen, welchen Formen T_ϱ man die $\varkappa'$, bez. welchen Formen T'_ϱ, man die $\varkappa$ proportional setzen kann.* Und bei dieser Fassung ist die Fragestellung in der That sofort zu erledigen; man denke nur daran, wie wir oben eine irgendwie auf der Riemann'schen Fläche vorgegebene algebraische Function f als Quotienten zweier Formen T_ϱ dargestellt haben. Die Sache ist einfach folgende: Man wird auf die mannigfachste Weise eine Punktgruppe Π' finden können, welche die Punktgruppe $\varkappa'_1 = 0$ zu einer Normalgruppe ϱ^{ten} Grades der C_m ergänzt. Dieselbe Punktgruppe Π' leistet dann das Gleiche für alle Punktgruppen $\varkappa'_1 = 0$, $\varkappa'_2 = 0$, ... $\varkappa'_{\mu'} = 0$; denn letztere Punktgruppen sind untereinander aequivalent. *Daher kann man die $\varkappa'_1, \varkappa'_2 \dots \varkappa'_{\mu'}$ mit Formen T_ϱ proportional setzen, welche sämmtlich in den Punkten der Gruppe Π' verschwinden.* Entsprechend wird man die $\varkappa_1, \dots \varkappa_\mu$ solchen T'_ϱ, proportional setzen, welche ihrerseits in den Punkten einer geeigneten Punktgruppe Π sämmtlich verschwinden. (Gebundene Formen, nach der früher bei Gelegenheit gebrauchten Ausdrucksweise).

So. 6 II 92 Ad b) haben wir die Aufgabe, auf jeder irgendwie gegebenen Curve des $R_1, R_2, R_3, \dots$ die algebraischen

Functionen, bez. Integralfunctionen, welche auf der zugehörigen Riemann'schen Fläche existiren, wirklich analytisch darzustellen.

Was Curven des R_1 angeht, so dürfen wir uns kurz auf Kap. IV dieser Vorlesung beziehen, nur dass dort nicht von „Curven des R_1" sondern von „Riemann'schen Flächen über der z-Ebene" die Rede war.

Die Geometer haben, von Clebsch beginnend, für die Zwecke analytischer Darstellung ganz besonders die Curven des R_2 zu Grunde gelegt. In der That beziehen sich die grosse Mehrzahl der Entwickelungen von Brill und Nöther etc. etc. auf ebene Curven.

Wir werden alle diese Entwickelungen aufnehmen und von unserem Standpunkte aus durchdenken müssen. Hier nur ein paar Einzelheiten, die ich willkürlich herausgreife, und die schon genügen werden, um erkennen zu lassen, wie für uns, die wir von den Grundansichten der Riemann'schen Theorie ausgehen, der Gedankengang der Geometer jedesmal umgeordnet werden muss:

Sei $\varphi(z_1, z_2\ z_3) = 0$ die vorgelegte Curve. Es ist dann in den genannten Untersuchungen immerzu von „adjungirten" Curven $f(z_1, z_2, z_3) = 0$ die Rede. Inzwischen sind es nicht eigentlich die „Curven" $f = 0$, sondern die Formen" f, welche in Betracht kommen.

Statt f werden wir gleich lieber g schreiben wollen, da für uns der Buchstabe g als Zeichen rationaler ganzer Formen von $x_1, x_2\, x_3$ typisch geworden ist. Wann wird man eine solche Form g (die wir einzig „auf" der Curve $\varphi = 0$ betrachten) zur Curve adjungirt nennen? Wenn der Quotient von g und der „Polare" eines beliebigen Punktes c_1, c_2, c_3, d.h. wenn der Quotient $\dfrac{g}{c_1\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + c_2\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + c_3\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}}$ [insofern wir in diesem Quotienten c_1, c_2, c_3 als unbestimmte Gröſsen ansehen] in allen singulären Punkten von $\varphi = 0$ endlich bleibt. Da wäre nun zuerst zu überlegen, weſshalb man (wie dies die Geometer thun), jede auf $\varphi = 0$ existirende algebraische Function als Quotienten zweier adjungirter g darstellen kann. Dann aber die Darstellung der Integrale! Um nur von den Integralen erster Gattung zu sprechen, so ist von vorne herein klar, daſs sich ein solches an der Curve $\varphi = 0$ durch eine Formel folgender Art darstellen läſst:

$$w = \int \frac{(c\,x\,dx)}{\sum c_i \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}} \cdot (T_{n-3}),$$

wo T_{n-3} eine zur Curve „adjungirte" algebraische Form $\underline{T}$ der $(n-3)$^ten^ Dimension darstellt. Statt deſsen schreiben die Geometer:

$$w = \int \frac{(c\,x\,dx)}{\sum c_i \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}} \, (\delta_{n-3})$$

d. h. sie ersetzen die adjungirten T_{n-3} durch adjungirte δ_{n-3}. Soll dies berechtigt sein, so müſsen die adjungirten T_{n-3} mit den adjungirten δ_{n-3} zusammenfallen. Wie beweist man das? Es ist kein Zweifel, daſs in den Entwickelungen der Geometer alle hierfür in Betracht kommenden Momente implicite vorhanden sind. Aber sie müſsen für unsere Zwecke herauspräparirt und in ganz andere Reihenfolge gebracht werden werden. So definiren die Geometer die Zahl p geradezu als die Zahl der Constanten, welche in den adjungirten δ_{n-3} enthalten sind, und haben dann natürlich zu zeigen, daſs diese Zahl p, wie überhaupt die adjungirten δ_{n-3}, bei beliebiger eindeutiger Transformation der Grundcurve $\varphi = 0$ erhalten bleiben. Für uns ist umgekehrt die Unveränderlichkeit der Zahl p wie der Integrale w bei beliebiger eindeutiger Transformation der Grundcurve der selbstverständliche Ausgangspunkt, und der Beweis hat sich, wie gerade bemerkt, darauf zu erstrecken, daſs die Identität der adjungirten T_{n-3} und δ_{n-3} entwickelt wird.

Nun konnten wir weiter von der Darstellung der Funktionen und Integrale auf Curven des R_3 etc. sprechen, wofür ja auch Untersuchungen der Geometer, insbesondere von Nöther vorliegen (Adjungirte Flächen etc.) Wir wollen uns aber dabei nicht aufhalten, sondern nur noch Einiges über folgende Frage sagen:

Wenn eine Riemann'sche Fläche vorgelegt ist, welches ist diejenige Curve, auf der man die zugehörigen Funktionen, insbesondere die Integrale, am einfachsten zur analytischen Darstellung bringt?

Ich habe für diesen Zweck früher *die kanonische Fläche über der η-Ebene*, d.h., wie wir uns jetzt ausdrücken werden, *die kanonische Curve des R*, in Vorschlag gebracht. Eine solche Curve war dadurch charakterisirt, daß die $2p-2$ Punkte, in denen irgend ein Differential erster Gattung dw verschwindet, auf ihr die Nullstellen einer algebraischen Form T_d waren (so daß $dw_1 : dw_2 \dots dw_p$ mit p Formen d^{ten} Grades $\varphi_1 : \varphi_2 : \dots \varphi_p$ proportional gesetzt werden konnten, welche keinerlei feste Nullstellen gemein hatten). *Genau so werden wir jetzt die kanonischen Curven eines beliebig ausgedehnten Raumes definiren* (vergl. Annalen 36, meine Arbeit über die Abel'schen Functionen.) Und diese werden dann, wie ich hier nicht in's

Einzelne nachweise, für die Darstellung der Integrale dieselben Vortheile bieten, wie die kanonischen Curven des R_1. An der Spitze aller dieser kanonischen Curven aber steht die „Vollcurve", welche der Annahme $d = 1$ entspricht, d.h. die C_{2p-2} des R_{p-1} deren Coordinaten $x_1 : x_2 : \ldots\ldots x_p$ direct mit den $dw_1 : \ldots\ldots dw_p$, d.h. den $\varphi_1 : \varphi_2 : \ldots \varphi_p$ proportional sind. Diese Curve der φ ist die allgemeine Normalcurve, welche wir bei allen Untersuchungen über analytische Darstellung unserer Functionen so lange am besten zu Grunde legen, als nicht durch die besondere Art der Fragestellung andere Curven (insbesondere andere kanonische Curven) bevorzugt erscheinen.

Dies sind nur erst einige der Momente, welche bei einer ausführlichen Vergleichung der Riemann'schen Theorie mit der Theorie der algebraischen Curven in Betracht kommen. Die allseitige Durchführung dieses Vergleiches soll die Aufgabe des zweiten Theiles der gegenwärtigen Vorlesung sein, den wir nun unmittelbar beginnen und für den wir das ganze Sommersemester in Anspruch nehmen. Wollen wir doch noch ausdrücklich hervorheben, daß bei diesem Unternehmen die Theorie der algebraischen Curven selbstverständlich nicht nur Impulse seitens der Riemann'schen Theorie erfahren wird, sondern auf letztere ihrerseits fördernd und weiterbildend einwirken muſs. Ich möchte in dieser Hinsicht hier gleich dreierlei hervorheben:

1) die Bedeutung, welche die Invariantentheorie der Curven für die Riemann'sche Theorie gewinnt. Wir werden z. B. lernen, daſs die $3p-3$ „Moduln" der Riemann'schen Fläche die „absoluten Invarianten" der Normalcurve C_{p-2} der φ sind. Andererseits werden wir uns fragen müſsen, was auf der Riemann'schen Fläche die Punkte bedeuten, in denen irgendwelche Grundcurve von einem covarianten Gebilde geschnitten wird. Was insbesondere bedeutet, für die Riemann'sche Theorie, das in der Curventheorie herrschende Gesetz der Dualität?

2) die groſse Entwickelung, welche in der Theorie der algebraischen Curven die *Abzählungstechnik* gewonnen hat. Wir haben da das sog. „Correspondenzprincip" von *Brill* und *Cayley*, wir haben die Methoden der „abzählenden Geometrie" (*Schubert*):

Wie sind die vom Riemann'schen Standpunkte aus anzusehen? *Hurwitz* hat da einen vielversprechenden Anfang gemacht (Math. Ann. 28).

3 Endlich muſs ich der *Realitätsbetrachtungen* gedenken, zu denen die Curventheorie nothwendig An-

laſs giebt, wenn man sich der ursprünglichen Bedeutung der ganzen in ihr benutzten Terminologie nicht absichtlich verschlieſsen will. Welche Bedeutung haben für die Riemann'sche Fläche die Punkte eines reellen Curvenzuges? Kann man vom Riemann'schen Standpunkte aus irgendwelche neue Einsicht in die Frage gewinnen, wie viele von den Vorkommniſsen, deren allgemeine Zahl man durch das Correspondenzprincip auf einer Curve festlegt, im besonderen Falle reell sein werden?

[Mi. 10.2.92] Zweiter Theil. – Beziehungen von Riemann's Theorie zur Lehre von den algebraischen Curven.

Indem wir uns vorbehalten, im Sommersemester einzelne Punkte noch ausführlicher zu behandeln, beginnen wir hier mit einem allgemeinen Bericht über die Sachlage:

I. Allgemeiner Bericht.

Wir handeln zunächst von den ebenen Curven, dann von den Curven im dreidimensionalen und überhaupt in höheren Räumen.

Ia. Ebene Curven.

A. Historisches über die Grundlegung der Theorie.

Die Theorie der ebenen algebraischen Curven ist bereits im vorigen Jahrhunderte verschiedentlich in Angriff genommen worden: so von *Newton* 1711 in seiner bemerkenswerthen (durchaus projectiven) „Enumeratio linearum tertii ordinis," anschliessend daran von *Maclaurin*, ferner von *Euler* und *Cramer* (in Genf), denen wir die ersten Untersuchungen über Curven vierter und höherer Ordnung verdanken. Inzwischen datirt die eigentliche Entwickelung der Theorie erst von der Zeit, wo unter dem Einflusse von *Poncelet's* „Traité des propriétés projectives" die beiden Umformungen der neueren Geometrie in den Vordergrund des geometrischen Intereſses gerückt waren: die Umformung durch Projection und die Umformung durch Dualität. Poncelet's Werk war 1822 erschienen. Blicken wir zunächst nur auf die Periode bis 1840, so haben wir da einerseits die „Synthetiker," wie Steiner und Chasles, die unter Beiseiteschiebung des Apparates der analytischen Geometrie durch bloſse Construction und Betrachtung geeigneter Figuren den neuen Gedankeninhalt der Geometrie zu umspannen suchten, andererseits die „Analytiker," wie Moebius und Plücker, die vielmehr auf eine Vervollkommnung des analytischen Apparates hinarbeiteten. Dort Ausgang von den geometrischen, sich wechselseitig dual entgegenstehenden „Grundgebilden," die, „projectiv" aufeinander bezogen, die Gebilde zweiten Grades in einfachster Weise erzeugten"; – hier Verallgemeinerung des Coordinatenbegriffs und geometrische Interpretation der jeweils durch Transformation herstellbaren Gleichungsformen des Gebildes.

Heutzutage wird kein Zweifel mehr darüber sein, daſs die Principien der Analytiker die weitertragenden gewesen sind. In der That fehlte den Synthetikern Zweierlei, um eine allgemeine Theorie der algebraischen

Gebilde in Angriff zu nehmen: einerseits die Definition der imaginären Elemente, andererseits eine Begriffsbestimmung des Algebraischen überhaupt. Nun hat man ja später Beides, wie sogleich noch näher ausgeführt werden soll, in synthetischer Form entwickelt, aber man hat dabei das eigentliche Princip der synthetischen Geometrie zur Seite schieben müſsen. Dieses Princip, wie es in der Theorie der geradlinigen Figuren und der Gebilde zweiten Grades so glänzend hervortritt, ist die unmittelbare Beweiskraft der anschauungsmäſsigen Construction. Statt deſsen verfährt die analytische Geometrie wesentlich „algorithmisch," d.h. sie gewinnt ihre Resultate durch Aneinanderreihung zahlreicher kleiner Schritte, von denen immer nur der einzelne unmittelbar als selbstverständlich gelten kann. Und nun hat die synthetische Geometrie, um zu dem erwähnten Ziele zu kommen, sich auch genöthigt gesehen, sich algorithmisch auszugestalten, nur daſs sie statt des Algorithmus der 4 Rechenoperationen, der in der analytischen Geometrie herrscht, sich einen eigenen Algorithmus ersonnen hat! Umgekehrt kann man sagen, daſs in der analytischen Geometrie neben der Rechnung immer mehr die Anschauung Boden gewonnen hat: die rechnerischen Einzelheiten zurückschieben und dafür den groſsen Zusammenhang der Gedankenentwickelung zu erfaſsen, das war jedenfalls für Plücker das eingestandene Ziel, welches er mit seiner *Theorie der algebraischen Curven*, 1839 (Bonn), verfolgte.

Zwei Gegenstände sind es, mit denen sich Plücker in diesem Werke ganz besonders beschäftigt:

1) *Die Schnittpunktsätze*, denen zufolge zwischen den $m\,n$ Schnittpunkten zweier algebraischer Curven m^{ter} und n^{ter} Ordnung Relationen bestehen, aus denen die merkwürdigsten geometrischen Beziehungen abgeleitet werden können.

Plücker betrachtet hier überall nur den sogenannten allgemeinen Fall: seine Beweise beschränken sich meist auf bloses Constantenzählen und bedürfen daher, trotzdem sie im Princip richtig sind, noch der wesentlichen Ergänzung: daſs man die möglichen Ausnahmefälle bezeichnet und deren Bedeutung darlegt.

Charakteristisch ist auch, daſs er die Schnittpunktsätze in erster Linie zur Discuſsion einer Frage benutzt, die uns heute kaum noch intereſsirt: der Frage nach der Natur der bei einer Curve n^{ter} Ordnung auftretenden *Asymptoten*. Plücker hatte eben damals noch keineswegs das projective Princip: nur solche Eigenschaften der Curven zu beachten, welche bei beliebiger Projection ungeändert bleiben, rücksichtslos aufgenommen; er betrachtete die Curven nach ihren gestaltlichen Eigenschaften, mit denen sie uns entgegentreten.

2) die Wechselbeziehungen zwischen den Singularitäten einer Curve (die sog. *Plücker'schen Formen.*). Ist n die *Ordnung*, k die Classe, d die Zahl der Doppelpunkte, r die der Rückkehrpunkte, t die Zahl der Doppeltangenten, w die der Wendetangenten, so hat man die 4 Relationen:

1) $k = n.n-1-2d-3r$, 2) $n = kk-1-2t-3w$,

3) $w = 3n.n-2-6d-8r$, 4) $r = 3k.k-2-6t-8w$,

die den Werth von drei unabhängigen Beziehungen haben, insofern aus 1) und 2), wie aus 3) und 4) gemeinsam folgt:

$$3(k-n) = w-r. \text{ —}$$

Doch wollen wir zunächst davon sprechen, wie sich die *Synthetiker allmählich zum allgemeinen Begriff der algebraischen Curve* erhoben haben.

Es geschah dies zunächst so, daſs man die functionentheoretische Grundlage (wie man heute sagen würde) der analytischen Geometrie festhielt, (also das Bezout'sche Theorem, demzufolge sich eine Curve m^{ter} und n^{ter} Ordnung in $m\,n$ Punkten schneiden) und nun das *Princip der projectiven Erzeugung),* das sich in der Theorie der

Kegelschnitte so fruchtbar erwieſen hatte, festhielt.

Der Kegelschnitt wird gewonnen, indem man zwei projective Geradenbüschel zum Schnitt bringt, entsprechend dem analytischen Umstande, daſs aus $p - \lambda q = 0$, $r - \lambda s = 0$ durch Elimination des λ $ps - qr = 0$ hervorgeht. Die Curven n^{ter} Ordnung laſsen sich entsprechend ableiten, wenn man zwei *Curven*büschel, das eine aus Curven der Ordnung n', das andere aus Curven der Ordnung n'' bestehend, projectiv aufeinander bezieht und zum Schnitt bringt; dabei muſs nur $n' + n'' = n$ sein. Das ist die Theorie, welche in den fünfziger Jahren insbesondere von *Chasles* und *de Jonquières* entwickelt wurde.

Die eigentliche principielle Schwierigkeit war damit, wie man sieht, keineswegs erledigt. Was bedeutet auf diesem Standpunkte auch nur das Theorem von der projectiven Erzeugung eines Kegelschnitts durch zwei Strahlbüschel, sofern es sich um einen reellen, nulltheiligen Kegelschnitt handelt (d.h. eine Curve 2ter Ordnung, die durch eine reelle Gleichung vorgestellt wird, der kein reeller Punkt Genüge leistet)? Was erst das gleiche Theorem für eine Curve zweiter Ordnung mit complexen Coëfficienten? Die groſse, hier vorhandene Lücke ausgefüllt zu haben, jedenfalls soweit als Gebilde zweiten Grades in Betracht kommen, *das ist das Verdienst v. Staudt's* [Beiträge zur Geometrie der Lage, Nürnberg, 1856 - 1861].

Ich brauche hier kaum zu entwickeln, wie v. Staudt dem *imaginären Punkte*, bez. der *imaginären Geraden* eine reale Interpretation verschafft: der imaginäre Punkt wird gedeutet:

durch die reelle Gerade, die ihn mit dem conjugirt imaginären Punkte verbindet,

durch die reelle Involution auf dieser Geraden, deren Doppelelemente der imaginäre Punkt und sein conjugirter sind,

endlich durch den *Sinn*, welcher der reellen geraden Linie beigelegt wird. —

die imaginäre gerade Linie dualistisch entsprechend.

Dagegen muss ich darauf aufmerksam machen, wie v. Staudt die Curven zweiter Ordnung einführt, *indem er nicht sowohl die Curven, sondern die zugehörigen Polarsysteme construirt*, also nicht sowohl die quadratischen Gleichungen $\sum a_{ik} x_i x_k = 0$, sondern die bilinearen Gleichungen $\sum a_{ik} x_i y_k = 0$ in Betracht zieht.

Die Curve erscheint dabei als die Coincidenzcurve ihres Polarsystems, d. h. als Ort solcher Punkte x, welche der ihnen zugeordneten geraden Linie y selbst angehören. Diese Definition hat ihre grosse Berechtigung. - Um es modern auszudrücken: unmittelbar, „lineal", construiren kann man nur rationale Elemente, also die Polargeraden y rationaler Punkte x. Indem wir zu den Punkten der Curve übergehen, vollziehen wir eine „Adjunction", die jenseits der ausführbaren Constructionen liegt, - womit die Frage nicht beseitigt sein soll, wie weit man denn weitere Curvenpunkte construiren kann, sobald man einen ersten Curvenpunkt adjungirt hat. -

v. Staudt selbst hat, wie gesagt, diesen Ansatz nur für die Gebilde zweiten Grades durchgeführt. Aber es steht einer Ausdehnung auf beliebige höhere Gebilde nichts anderes entgegen, als die steigende Complication der Betrachtung. Den allgemeinen Fall erläutert wohl zuerst H. Thieme in Bd. 24 von Schlömilch's Zeitschrift (1879), folgeweise an Beispielen in Annalen 23 (1884) und 28 (1887). Das gleiche Ziel verfolgt Hr. E. Kötter mit seiner Preisarbeit in den Abhandlungen der Berliner Akademie von 1887 (Grundzüge einer rein geometrischen Theorie der algebraischen Curven. —

Es giebt übrigens noch einen dritten Weg,*) den [Fr. 13.2 92]

---

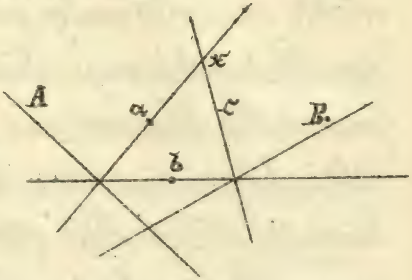
*) neben der projectiven Erzeugungsweise und der Definition durch die Polarsysteme.

Begriff der algebraischen Curve rein geometrisch zu fassen. Derselbe rührt von Graßmann her, und wurde von demselben leider nicht so weit verfolgt, als er es verdient haben würde. Graßmann construirt „lineale" Mechanismen, welche es gestatten, eine beliebige algebraische Curve zu zeichnen, sobald man einen ersten Punkt derselben kennt. (vergl. Crelle's Journal Bd. 31, 36, 42, 52). Als einfachstes Beispiel für einen solchen Mechanismus mag man Maclaurin's Construction der Kegelschnitte heranziehen:

Ein Punkt x beschreibt einen Kegelschnitt, wenn er Spitze eines Dreiecks ist, dessen Seiten sich um drei feste Punkte a, b, c drehen, während die beiden anderen Ecken auf festen geraden Linien A, B fortschreiten:

(symbolisch geschrieben:

$(x\, a\, A\, b\, B\, c\, x) = 0$).



Bei dieser Construction ist, wie man sofort sieht, nicht nöthig und das unterscheidet den Mechismus von einem gewöhnlichen Gelenkwerk (linkwork), daß die Punkte a, b, c oder auch x auf den hindurchgehenden Geraden fest sind, welche in a, b, c etc durch drehbare Ösen hindurchlaufen. Nur die Geradlinigkeit der Drähte, nicht ihre Eigenschaft einen der Länge nach unveränderlichen Körper vorzustellen, wird benutzt. Eben darum die Benennung: „linealer" Mechanismus.

Die Idee von Grassmann ist nun die, lineale Mechanismen zu construiren, bei denen der bewegliche Punkt x (der die Curve beschreiben soll) beliebig oft (n-mal) benutzt wird, und zwar zeigt Grassmann, daſs man auf die Art allemal eine Curve n^{ter} Ordnung bekommt, und daſs man jede Curve n^{ter} Ordnung so erzeugen kann. Im Einzelnen ist da freilich Vieles unbestimmt, insbesondere nicht recht klar, wie man den Mechanismus in einfachster Weise so bestimmt, daſs er die allgemeine Curve n- Ordnung erzeugt. Nur für Curven dritter und vierter Ordnung hat Grassmann die Sache näher ausgeführt. So erzeugt er z. B. die C_3 durch die Vorschrift:

$$(x\,a\,A,\ x\,b\,B,\ x\,c\,C) = 0$$

was sagt, daſs der Durchschnittspunkt

der Geraden xa mit A
der Geraden xb mit B
der Geraden xc mit C

auf einer geraden Linie liegen sollen. (Näheres hierüber, wie insbesondere auch über die Beziehung zur projectiven Erzeugung ebener Curven in Clebsch-Lindemann I, p. 536-541).*) Uebrigens darf man von der

---

*) wegen der Erzeugung der C_4 vergl. die Leipziger Dissertation von Dingeldey, 1885.

praktischen Brauchbarkeit derartiger „linealer" Apparate sich keine übertriebene Vorstellung machen. Wir sagten schon, daſs man vor allen Dingen einmal (um den Apparat überhaupt einzustellen), *einen* Punkt *
der zu construirenden Curve kennen muſs. Von ihm beginnend beschreibt dann der Apparat natürlich nur einen Zug der in Betracht kommenden (vielleicht aus mehreren reellen Zügen bestehenden) algebraischen Curve. Aber selbst das ist nicht einmal richtig, weil man den Apparat nicht anders einrichten kann, als daſs er sich selbst sperrt, so daſs nur ein *Stück* des in Betracht kommenden Curvenzuges wirklich realisirt wird. Wie übrigens müſste man den Apparat modificiren, wenn er auch die *complexen* Punkte der Curve liefern sollte, diese complexen Punkte im Sinne v. Staudt's durch reelle Involutionen auf reellen Geraden gedeutet? Dazu die complexen Punkte einer beliebigen reellen oder complexen Curve?

Nach diesem Excurs über synthetisch-geometrische Aufgaben kehren wir zu unserer eigenen Gedankenentwickelung zurück. Wir wollen v. Staudt's reale Deutung der imaginären Elemente für uns nicht sowohl bei der *Definition* der algebraischen ebenen Curven benutzen, - die mag uns nach wie vor durch die algebraische Gleichung $f(s,z)=0$ gegeben sein — als zur *Veranschaulichung* deſsen, was mit einer solchen Curve gemeint ist, und damit zum *unmittelbaren Uebergange* von der Curventheorie zur Riemann'schen Theorie. In der That, wenn es uns gelingt, die Gesammtheit der reellen und imaginären Punkte oder Tangenten, welche eine Curve besitzen mag, real vor Augen zu sehen, dann haben wir eo ipso ein Aequivalent der Riemann'schen Fläche, an dem wir beispielsweise das p der Curve als wirkliche Zusammenzahl werden bestimmen können müſsen."

Und in der That muſs man ja sagen, daſs die gewöhnliche indirecte Art, die Curvenlehre mit der Riemann'schen Theorie in Verbindung zu setzen und (beispielsweise) die Zahl p in die Curvenlehre einzuführen, nicht befriedigen kann. Man macht das ja so, daſs man eben die ebene Curve $f(s,z)=0$ [bei der man nur die *reellen* Werthsysteme (s,z), die $f=0$ genügen, vor Augen sieht] in begriffliche Beziehung zu der Riemann'schen Fläche setzt, welche über der $z=x+iy$-*Ebene* der Function $s(z)$ entsprechend construirt werden kann, und nicht sowohl den Verlauf von s, als nur die Verzweigung von s versinnlicht.

Das Resultat, welches zuerst *Clebsch* auf diesem Wege ableitete (Crelle 63, 1863-64: Ueber die Anwendung der

Abel'schen Functionen in der Geometrie)*):
daſs nämlich p ebensowohl $= \frac{n-1 . n-2}{2} - d - r$

als $= \frac{k-1 . k-2}{2} - t - w$

sein muſs (letzteres, weil der Uebergang zur Reciprocalcurve ein besonderer Fall der eindeutigen Transformation ist, bei welcher das p erhalten bleiben muſs), ist ja ebenso elegant als wichtig: aber daſs man mit dieser Formel keine tiefere Auffassung der eigentlichen Bedeutung der Zahl p als eines Maaſses für den Zusammenhang der Riemann'schen Fläche verband, daſs darauf für die Zahl p die ganze aeuſserliche Benennung deficience = défaut = Defect Platz greifen konnte**), das ist es, was ich tadele.

Wir müſsen unseren neuen Absatz so beginnen, daſs ich zunächst von den reellen Punkten und Tangenten der reellen algebraischen ebenen Curven handele, also von den reellen Zügen, welche diese Curven darbieten.

B. Anschauungsmäſsiges.

Wir werden die hier zu gebenden Entwickelungen in knapper Form unter eine Reihe besonderer Ueberschriften zusammenfassen:

---

*) vergl. auch Schwarz sowie Clebsch selbst in Crelle 64.

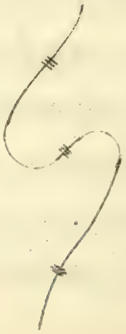
**) weil nämlich eine Curve vom Geschlechte p p Doppelpunkte oder Spitzen weniger hat, als sie haben müſste, um rational zu sein!

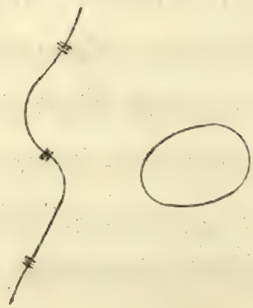
a. Die reellen Züge der niedersten Ordnungscurven. Grundlegend für alle hier und bei den folgenden Betrachtungen anzustellenden Entwickelungen ist, dass die projective Ebene, die im Unendlich-Weiten eine Gerade hat (und also nicht einen einzelnen Punkt, wie die Ebene der Functionentheorie), als eine Doppelfläche anzusehen ist. Hierin liegt, dass zwei auf dieser Ebene verlaufende geschlossene Curven sich nicht nothwendig in einer geraden Anzahl von Punkten zu schneiden brauchen, sondern ebenso gern in einer ungeraden Anzahl von Punkten, wofür ja zwei gerade Linien das einfachste Beispiel geben. (Dies Paradoxon verschwindet sofort, wenn man zwischen den beiden Seiten der Ebene, der Oberseite und der Unterseite, unterscheidet: indem man sich dann vorstellen muss, dass jede gerade Linie zweimal durchlaufen werden muss, einmal über die Oberseite hin, das andere Mal über die Unterseite hin, ehe sie in sich zurückkehrt, haben zwei gerade Linien dann in der That zwei Schnittpunkte: einen auf der Oberseite, einen auf der Unterseite). Von hier aus bietet sich denn die Unterscheidung der geschlossenen ebenen Curvenzüge in paare und unpaare, wie sie zuerst v. Staudt (in seiner Geometrie der Lage, 1847) gelehrt hat. Da zwei unpaare Curvenzüge sich nothwendig schneiden, wird eine Curve n^{ter} Ordnung ohne Doppelpunkt nothwendig einen oder keinen unpaaren Curvenzug haben, jenachdem n ungerade oder gerade ist. Des Näheren machen wir nun folgende Angaben.

1) Bei den *Curven zweiter Ordnung* sind zwei Typen zu unterscheiden (sofern wir uns auf reelle Curven beschränken): der *eintheilige* und der *nulltheilige* Typus. Beide Typen haben $p = 0$ und stellen eben darum, rationale Curven vor [deren Coordinaten sich rational durch eine Hülfsgröſse λ, welche auf der Curve selber eindeutig ist, darstellen).

2) Bei den *Curven dritter Ordnung* hat man im Ganzen *fünf* Typen, die bereits Newton in seiner „Enumeratio linearum tertii ordinis" unterschieden hat:

für Curven ohne singulären Punkt, d. h. $p = 1$: den eintheiligen und den zweitheiligen Typus:

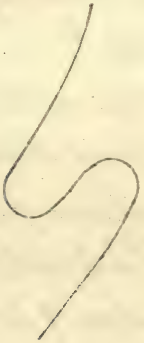


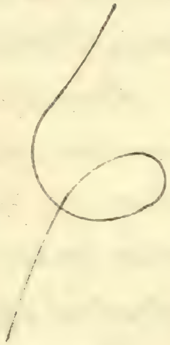


Beidemal trägt der unpaare Curvenzug drei reelle Wendungen. Daß die auf einer geraden Linie liegen müssen, erkennt man leicht aus dem Schnittpunktsatz. Algebraisch zu reden werden ja 9 Wendepunkte vorhanden sein, die sich dann 12 mal zu je 3 auf eine Gerade anordnen (Plücker).

Für Curven mit Doppelpunkt (p = 0)

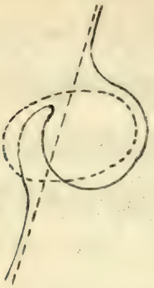
ebenfalls zwei Typen (je nachdem ein isolirter Doppelpunkt oder ein eigentlicher Doppelpunkt vorliegt, in welchem sich zwei Curvenzweige kreuzen):

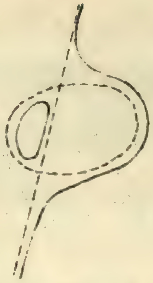


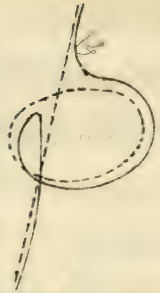


Es ist lehrreich, die beiden Fälle aus den vorangehenden beiden durch Gränzübergang entstehen zu lassen. – Man bekommt Beispiele aller vier Fälle, wenn man eine Gerade nimmt, die einen eintheiligen Kegelschnitt schneidet, und nun entweder in dem einen oder anderen Sinne den einen oder auch beide

Schnittpuncte auflöſst:







eventuel das Oval, welches sich dabei abgeschnürt hat, sich zum isolirten Puncte zusammenziehen läſst:

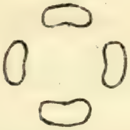
für Curven mit Spitze: einen Typus ($p=0$): der sich natürlich auch wieder an die vorangehenden Typen durch Continuität anschlieſst.*)

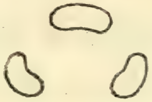
Man beachte: Von den drei reellen Wendungen werden seitens des gewöhnlichen Doppelpunctes 2, ebenso seitens der Spitze 2, dagegen seitens des isolirten Doppelpunctes keiner absorbirt. Den Plücker'schen Formeln zufolge absorbirt dem entgegen von den 9 überhaupt vorhandenen Wendepuncten jeder Doppelpunct 6, die Spitze 8: auch das wird augenfällig hervortreten müſsen, sobald es uns gelingt, die Gesammtheit der complexen Elemente der Curve anschaulich zu überblicken.

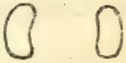
---

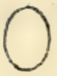
*) Von den Curven dritter Ordnung mit $p=0$ bestehen zwei nur aus einem Zug, während bei der einen noch ein isolirter Doppelpunct zutritt. Die Curven 2. Ordnung hatten $p=0$ und waren eintheilig oder nulltheilig. Ist es nun zweckmäſsig alle Curven von $p=0$ schlechtweg als „unicursale" Curven zu bezeichnen?

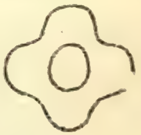
3. Die Curven vierter Ordnung sind hinsichtlich der bei ihnen möglichen Gestalten, jedenfalls was die Realität der Doppeltangenten angeht, erst von Zeuthen im 7ten Bande der mathematischen Annalen (1874) endgültig untersucht worden. Wir handeln hier nur von den Curven 4. Ordnung ohne singuläre Punkte, d. h. mit $p=3$. Da haben wir im Ganzen 6 Typen zu unterscheiden: [Mi. 17.2.92]











Wir theilen die Doppeltangenten in solche der ersten und zweiten Art: zur ersten Art gehören diejenigen, welche entweder denselben Curvenzug zweimal berühren oder isolirt verlaufen, zur zweiten Art die anderen, welche zwei verschiedene Curvenzüge berühren (von imaginären Doppeltangenten gar nicht zu reden). Da ist denn Zeuthen's schöner Satz: daſs immer vier Doppeltangenten der ersten

Art vorhanden sind, daſs also in den verschiedenen Fällen

	I	II	III	IV	V	VI
bez.	28,	16,	8,	4,	4,	4

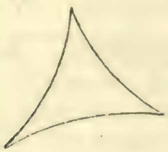
Doppeltangenten reell sind.

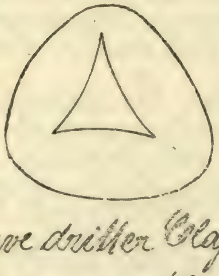
b) Uebertragung auf Claſsencurven.

Es ist natürlich nicht schwer, aber doch lehrreich und zu Anfang sogar überraschend, alles das Gesagte auf die Curven zweiter, dritter, vierter Claſse zu übertragen.

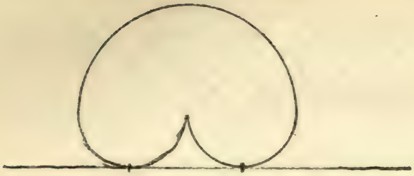
Um hier nur von den Curven dritter Claſse zu reden, so werden wir bei ihnen statt des unpaaren Curvenzuges mit drei auf gerader Linie befindlichen Wendungen, der bei der Mehrzahl der Curven dritter Ordnung auftrat, einen Curvenzug mit drei Spitzen haben, die so gegen einander liegen, daſs die drei Spitzentangenten in einem Punkte zusammenlaufen.

Folgendes sind die beiden Typen der Curven dritter Claſse mit $p = 1$:

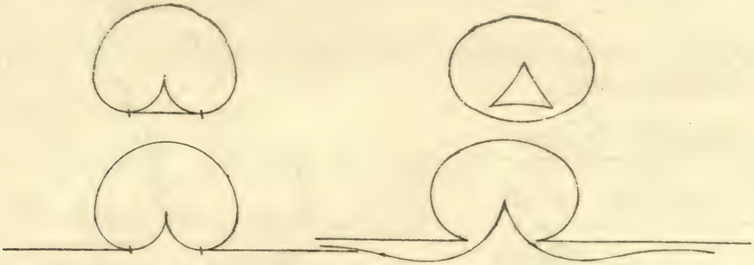




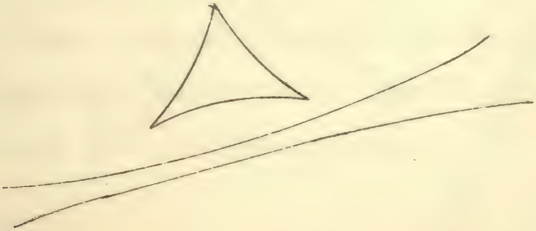
Wir haben dann ferner die Curve dritter Claſse mit nicht isolirter Doppeltangente: $(p=0)$ die sowohl aus dem zwei-



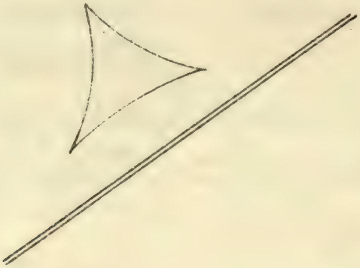
theiligen, wie dem eintheiligen Typus $p = 1$ durch Gränzübergang herausgebracht werden kann, wobei das eine mal das eine Segment, das andere Mal das andere Segment der Doppeltangente doppeltzählend aus reellen Stücken der Curvenzüge $p = 1$ entstehen:



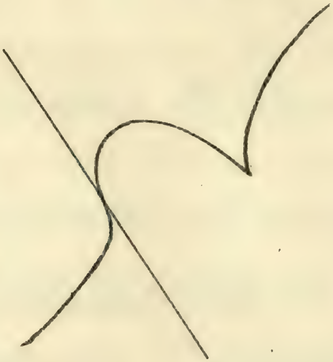
Um die Curve dritter Claſse mit isolirter Doppeltangente herauszubringen, muſs man die zweitheilige Curve zuerst so projiciren, daſs ihr Oval durch's Unendliche zieht und daher die Gestalt einer Hyperbel annimt:



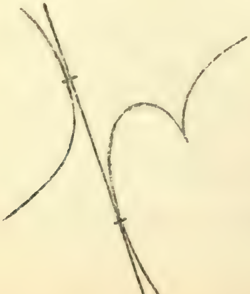
und um die beiden Aeste der Hyperbel (die in der Figur schon sehr bei einander gezeichnet sind) vollends zur doppeltzählenden Geraden zusammenfallen lassen:

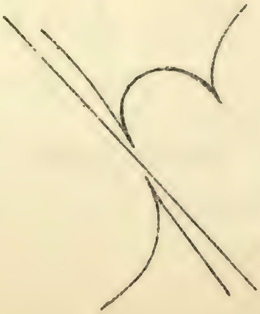


Endlich haben wir die Curve dritter Classe mit Wendetangente, die nach den Plücker'schen Formeln nichts Anderes ist als eine Curve dritter Ordnung mit Spitze.



Sie erscheint als Uebergang zwischen den beiden Arten der Curven 3. Classe mit Doppeltangente:





c) Curven höherer Ordnung und Claſse.

Ueber Curven höherer Ordnung und Claſse ist nur erst wenig gearbeitet worden.

Bemerkenswerth ist der Gedanke, den *Franz Meyer* 1879 in seiner Münchener Dissertation entwickelt [Anwendung der Topologie auf die rationalen Curven 4. und 5. Ordnung], nämlich die eintheiligen rationalen Curven mit $\frac{n-1\cdot n-2}{2}$ eigentlichen Doppelpunkten nach der *Reihenfolge* zu claſsificiren, mit der auf dem reellen Zuge die zweimaligen Durchsetzungen der verschiedenen Doppelpunkte aufeinander folgen.

Im 10ten Bande der math. Annalen*) hat *Harnack* den Satz bewiesen, daſs eine Curve vom Geschlechte p nicht mehr als p+1 reelle Züge haben kann, daſs aber dieses Maximum der Zugezahl auch immer erreicht werden kann. Ersichtlich stimmt das bei den Curven 2ter, 3ter, 4ter Ordnung oder Claſse, die wir vorstehend betrachten.

Ebenda veröffentlichte ich dann meine „*neue Relation zwischen den Singularitäten*", die sozusagen ein Seitenstück zu den Plücker'schen Formeln ist. Sei n die Ordnung, k die Klaſse der Curve, und spalte man die d Doppelpunkte und t Doppeltangenten

---

*) 1876

in d' reelle nicht isolirte, d'' reelle isolirte, $2d'''$ imaginäre
bez. in t' ————————, t'' ————————, $2t'''$ ————————,
andererseits die $\underline{r}$ Rückkehrpunkte und w Wendetangenten

in $\underline{r}'$ reelle, $2\,\underline{r}''$ imaginäre
bez. in w ———— $2w''$ ————————,
so hat man:

$$\underline{n + w' + 2t'' = k + r' + 2d''.}$$

In diese Formel ist eingeschloſsen, was man über die Realität der Wendepunkte der Curven dritter Ordnung weiſs, nicht minder der Zeuthen'sche Satz von den 4 Doppeltangenten erster Art der C_4: derselbe nimmt hier die bestimmtere Form an:

$$w' + 2t'' = 8.$$

Ferner sind da eingeschloſsen eine Reihe von Folgerungen über allgemeinere Curven. Nehmen wir z. B. zwei Ordnungscurven $n^{\underline{ter}}$ Ordnung ohne singuläre Punkte: $\varphi = 0$, $\psi = 0$, die in allgemeiner Lage gegeneinander befindlich sein sollen, und betrachten die complexe Curve $\varphi + i\psi = 0$. Mit ihrer conjugirten zusammen bildet dieselbe eine reelle Curve: $\varphi^2 + \psi^2 = 0$ von der Ordnung $2n$ und der Claſse $2n(n-1)$, mit einer gewiſsen Zahl reeller isolirter Doppelpunkte (d''), welche einfache isolirte Punkte der Curve $\varphi + i\psi = 0$ sind, und einer gewiſsen Zahl (t'')

reeller isolirter Doppeltangenten (welche _einfache_ isolirte Tangenten von $\varphi + i\psi = 0$ sind.) Da hat man denn

$$2n + 2t'' = 2n.(n-1) + 2d''$$

oder

$$t'' - d'' = n\,(n-2).$$

Dies ist ein merkwürdiger auf $\varphi + i\psi = 0$ bezüglicher Satz: in der That wird man über die _einzelnen_ Zahlen t'', d'' nichts Allgemeines aussagen können. –

Hieran schlieſst sich dann die Arbeit von _Brill_ in Ann. 16 (1879). Daſs man den Einfluſs höherer Singularitäten auf die Plückerschen Formeln zweckmäſsigerweise so formulirt, daſs man von einer bestimmten Zahl von Doppelpunkten, Spitzen, Doppeltangenten und Wendetangenten redet, welche in die Singularität zusammengerückt sind, wurde von _Cayley_ schon vor langer Zeit ausgeführt und ist seitdem mannigfach erläutert worden, wie wir hier nicht weiter darlegen können. Brill untersucht nun, mit welcher characteristischen Zahl eine beliebige höhere Singularität in die Relation $n + w' + 2t'' = k + \underline{r}' + 2d''$ eingeht [_Realitäts-Index_ der Singularität]. Auſserdem formulirt er für die _rationalen_ Curven ($p = 0$) einen _algebraischen_ Beweis meiner Formel [die ich selbst nur durch geometrische Continuitätsbetrachtungen abgeleitet hatte]. Dieser Beweis ist später von _Franz Meyer_ weiter verfolgt worden (Göttinger Nachrichten von 1888; Math. Annalen 38, 1890). Franz Meyer hat denn auch später erläutert, wieso sich die Formel auf Raumcurven ausdehnt, bez. warum sie sich eigentlich auf Raumcurven ausdehnen läſst (Göttinger Nachrichten 1891). —

Dies dürfte ziemlich Alles sein, was bis jetzt über die reellen Gestalten der höheren ebenen Curven bekannt ist, wir schreiten jetzt dazu, die zugehörigen complexen Elemente in Betracht zu ziehen. —

d. Die zu den Curven gehörigen Riemann'schen Flächen, – ich meine damit die „neuen" Riemann'schen Flächen, welche ich 1874 in Bd. 7 der Annalen einführte und dann 1876 in Bd. 10 einer näheren Untersuchung unterwarf. Ich darf zufügen, daſs diese Flächen, trotz der theoretischen Wichtigkeit welche dieselben zu besitzen scheinen, bisher nur in den beiden von mir veranlaſsten Diſsertationen des Weiteren untersucht worden sind:

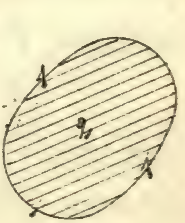
Harnack, Verwerthung der elliptischen Functionen für die Geometrie der Curven dritten Grades. Math. Ann. 9, 1874 - 75,

Haskell, Ueber die zur Curve vierter Claſse $\lambda^3\mu + \mu^3\nu + \nu^3\lambda = 0$ im projectiven Sinne zugehörige mehrfache Ueberdeckung der Ebene, American

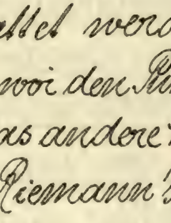
Jornal XIII, 1891. —

Der Gedanke bei Einführung dieser „neuen" Flächen ist der, nicht nach dem Orte der complexen *Punkte* einer Curve zu fragen, — denn der complexe Punkt wird nach v. Staudt durch eine reelle Gerade [mit Involution u. Sinn] gedeutet und man müßte also das Nebeneinander von ∞^2 geraden Linien zu erfassen suchen, was nicht unmöglich, aber doch unbequem ist —, sondern nach dem Orte der complexen *Tangenten*. *Indem wir jeder complexen Tangente, wie auch jeder reellen Tangente der Curve einen bestimmten Punkt zuordnen, bekommen wir ein Nebeneinander von Punkten, eine bestimmte, vielleicht mehrfache Ueberdeckung der Ebene, welche direct als eine Riemann'sche Fläche des durch die Curvengleichung dargestellten algebraischen Gebildes angesehen werden kann.*

Am klarsten wird das, wenn wir die beiden einfachsten Beispiele betrachten: den Fall des eintheiligen Kegelschnitts und den Fall der zweitheiligen Curve dritter Classe.



Beim eintheiligen Kegelschnitt wird man von jedem Punkte des Inneren 2 imaginäre Tangenten an die Curve legen können, von jedem Punkte der Curve selbst eine reelle Tangente. Dementsprechend denken wir uns das Innere zweifach, den Rand einfach mit Punkten der Riemann'schen Fläche besetzt. *Die Riemann'sche Fläche überdeckt das Innere der Ellipse mit 2 Blättern, die längs des Randes wie vermöge einer Falte an einander gefügt sind.* Anders ausgesprochen: *sie hat die Gestalt eines ganz flachgedrückten Ellipsoids, deſsen scheinbarer Umriſs unsere Curve ist.* Daſs dies die richtige Darstellung ist, geht auch daraus hervor, daſs der reelle Punkt des Inneren unserer Curve, jenachdem er die eine oder andere der durch ihn hindurchlaufenden complexen Tangenten vorstellen soll, im Staudt'schen Sinne mit dem einen oder anderen „Sinne" ausgestattet werden muſs; in der That entspricht dies dem, daſs wir den Punkt einmal der Vorderseite des vorderen Blattes, das andere Mal der Rückseite des hinteren Blattes unserer Riemann'schen Fläche zurechnen. — Und nun bemerken wir, daſs unser „Ellipsoid" (um diesen Ausdruck noch einmal zu gebrauchen) in der That den (auſsergewöhnlichen) Zusammenhang 0 besitzt, so daſs der Kegelschnitt zum Geschlechte 0 gehört, wie es sein muſs. —



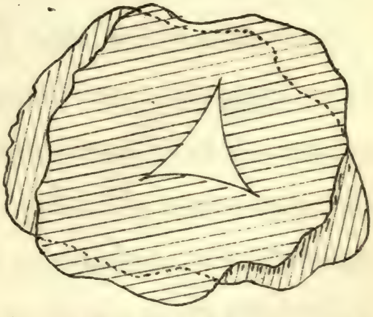
Bei der zweitheiligen Curve dritter Claſse giebt's bei ganz entsprechendem Ansatze eine Ringfläche $p=1$, wie dies durch die nebenstehende Figur wohl hinreichend deutlich erläutert wird.

(Vorder- und Rückseite des schraffirten Raumes sind wieder längs der reellen Curvenzüge, die selbst nur einfach überdeckt sind, zu einer geschloſsenen Fläche zusammengefügt.)

Man beachte noch: die Fläche zieht sich mit einem Doppelblatt an den reellen Curvenzug immer von der concaven Seite heran. Das ist offenbar ein allgemeines Gesetz.

In der Eigenart der hiermit eingeführten „neuen" Riemann'schen Flächen werden wir einen tieferen Einblick gewinnen, wenn wir jetzt die sämmtlichen Arten von Curven dritter Claſse, die wir eben aufführten, sowie insbesondere die zwischen den verschiedenen Arten bestehenden Uebergänge in Betracht ziehen wollen.

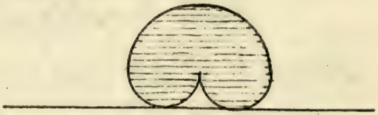
Die eintheilige Curve 3. Claſse mit $p=1$ bedarf [So. 20. 2. 92] in dieser Hinsicht kaum der Erläuterung. Zeichnen wir dieſselbe wie auf p. 248, so zieht sich die Fläche vom reellen Curvenzuge aus mit ihrem Doppelblatt in's Unendliche:



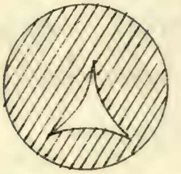
und wir haben in der That eine (im Unendlichen geschloſsene) Fläche vor uns, die genau so, wie etwa das einschalige Hyperboloid, die Zusammenhangszahl 2 besitzt (nach-

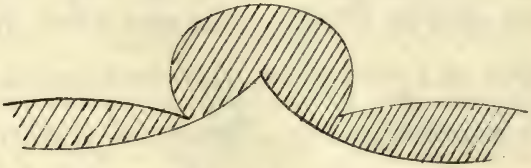
Schläflis und meiner Zählung), d. h. zum Geschlechte $p = 1$ gehört.

Ebenso ist die Fläche der Curve dritter Claſse mit nicht isolirter Doppeltangente ohne Weiteres eine Fläche vom Geschlechte $p = 0$: wobei besonders schön ist, zu sehen, wie diese Fläche $p = 0$

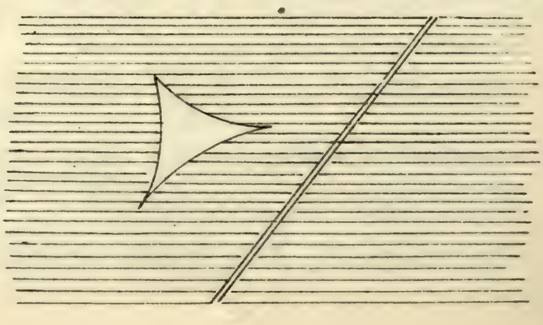


sich entsprechend den auf p 249 gegebenen Figuren als Uebergangsfall zwischen zwei Flächen vom Geschlechte 1 einordnet:

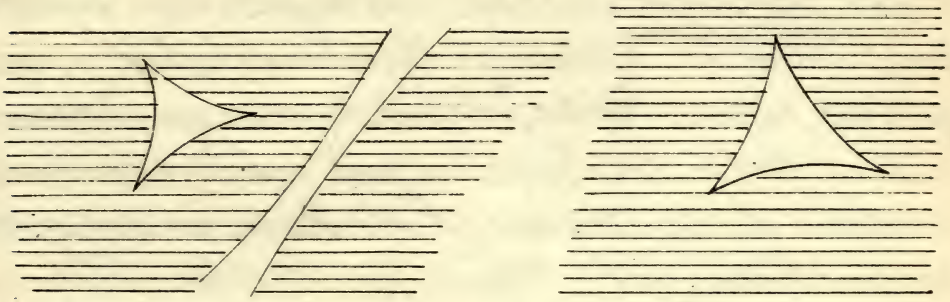




Dagegen giebt die Curve dritter Claſse mit isolirter Doppeltangente zu längerer Erläuterung Anlaſs. Indem wir an die Figur von p 250 anknüpfen erhalten wir offenbar eine Fläche, welcher die isolirte Doppeltangente nach ihrer ganzen Erstreckung angehört: Dieselbe ist aufzu-



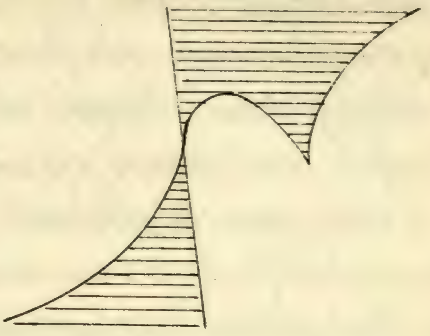
faſsen als Uebergang zwischen der Fläche einer eintheiligen und einer nulltheiligen Curve:



und wird dementsprechend wohl am besten so gedacht, daſs man sich dieselbe (im oberen und unteren Blatte) entlang der isolirten Doppeltangente *zerschnitten* denkt, worauf man längs der Schnittlinien die Blätter je nach Bedürfniſs entweder so an einander heften kann, wie bei der zweitheiligen Curve geschieht, oder so, wie es bei der eintheiligen Curve der Fall ist. Bei dieser Zerschneidung wird, weil es sich um die Anbringung eines „Rückkehrschnittes" handelt, die Zusammenhangszahl der Fläche nicht geändert. *Die Zusammenhangszahl unserer Fläche ist also nach wie vor = 2, während doch das p unserer Curve auf 0 gesunken sein soll!*

Wie ist das zu verstehen? Die Sache ist die, daſs unsere Fläche im vorliegenden Falle auf die ideale Riemannsche Fläche, die in der That $p = 0$ besitzt, nicht ausnahmslos eindeutig bezogen ist. Vielmehr entsprechen der isolirten Doppeltangente, welche über unserer Fläche als Curve hinläuft, auf letzterer nur zwei Stellen! Wollen wir eindeutige Beziehung haben, so mögen wir unsere Fläche, wie wir ohnehin gerade verabredeten, längs der Doppeltangente zerschneiden, während wir gleichzeitig die ideale Fläche an den genannten zwei Stellen mit 2 Oeffnungen versehen. Die beiden „berandeten" Flächen, welche wir so erhalten, sind dann in der That ein-eindeutig bezogen (wobei es intereſsant ist, zuzusehen, welche Uferstrecken unserer Fläche der Umgebung der einzelnen auf der idealen Fläche angebrachten Oeffnung entsprechen). Und in der That bieten beide Flächen jetzt die Zusammenhangszahl 2 dar: denn es ist bekannt, daſs Anbringung einer Punktirung die Zusammenhangszahl einer Fläche immer um 1 erhöht. Hiernach ist nicht nur nicht paradox, daſs unsere Fläche die Zahl 2 aufweist, sondern umgekehrt werden wir sagen müſsen: *eben in dem Umstande, daſs sie die Zusammenhangszahl 2 besitzt, erkennen wir mit Rücksicht darauf daſs die isolirte Doppeltangente nach ihrer ganzen Erstreckung der Fläche angehört, daſs p zu 0 geworden ist.*

Was endlich die *Curve dritter Claſse mit Wendetangente* angeht, so haben wir folgende Figur als Uebergang zwischen 2 Flächen, die zu den beiden auf p. 250 gezeichneten Curven mit Doppeltangente gehört.



Wie sollen wir diese neue Fläche auffaſsen? Wir können uns gerne denken, daſs man dieselbe längs der Wendetangente aufschneiden soll. Andererseits wollen wir in der idealen Fläche an der einen Stelle, die der Wendetangente entspricht, eine Oeffnung machen. Und indem wir die beiden Flächen dann als eindeutig auf einander bezogen ansehen, werden wir sagen, *daſs die Zusammenhangszahl unserer Fläche mit Wendetangente = 1 gesetzt werden soll*; Es ist das aber nicht sowohl ein Satz, als eine Verabredung. —

e. Die neuen Riemann'schen Flächen bei einer beliebigen reellen ebenen Curve mit einfachen Plücker'schen Singularitäten.

Wir werden uns da eine doppelte Aufgabe stellen können. Indem wir an die Aufzählung der Singularitäten anknüpfen, wie sie auf p. 251 gegeben ist, werden wir vor allen

Dingen verlangen zu erfahren, welche Bedeutung die einzelne Singularitätenform für unsere Fläche besitzt, — dann aber wünschen, die Zusammenhangszahl unserer Fläche abzuzählen. Indem wir die letztere $= 2p + w' + 2t''$ setzen, soll dann die solcherweise definirte Zahl p gleich dem von der gewöhnlichen Theorie angegebenen Ausdrucke $\frac{k-1 \cdot k-2}{2} - t - w$ werden. — Sei es bei den hierauf bezüglichen Erläuterungen gestattet die Anzahlen d', d'', … zugleich als *Benennungen* der einzelnen Singularitätenarten zu benutzen, so daſs also ein Doppelpunkt d' ein Doppelpunkt ist, welcher zur Kategorie der d' Doppelpunkte, i e. der reellen, nicht isolirten Doppelpunkte zählt. — Da ist nun zur ersten Fragestellung vielleicht Folgendes zu bemerken:

1) Die Singularitäten d', r', t' haben für unsere Flächen keine andere Bedeutung, als diejenige, die sie für die reellen Züge der Curve besitzen.

2) Die Singularitäten t'', w' werden für unsere Fläche ganz allgemein die Rolle spielen, die ihnen eben bei den Curven dritter Claſse zukam.

3) *Die Doppelpunkte d'' sind Doppelverzweigungspunkte unserer Fläche*, d.h. solche Stellen, an denen sowohl zwei obere als zwei untere Blätter der Fläche mit einander verzweigt sind.

4). *Die reellen Punkte der Doppeltangenten $2\,t'''$ sind aufzufaſsen als Stellen, an denen zwei Doppelpunkte d'' zusammenrücken.* In der That, wenn eine Curve der Classe k zwei complexe Doppeltangenten erhält (also $2\,t'''$ um 2 wächst), so sinkt die Ordnung um 4 Einheiten, und das wird, da doch die Relation $n + w' + 2\,t'' = k + \underline{r}' + 2\,d''$ aufrecht erhalten bleiben muſs, durch eine Abnahme von d'' um 2 Einheiten ausgeglichen. Die beiden Doppelverzweigungspunkte, die in den 2 Stellen d'' gelegen sind, compensiren sich dabei gerade, *so daſs in dem reellen Punkte zweier complex-conjugirter Doppeltangenten unsere Fläche keinerlei Verzweigung mehr darbietet.*

5.) *Die reellen Punkte zweier conjugirt imaginärer Wendetangenten ($2\,w''$) sind aufzufaſsen als Stellen, an denen drei Doppelpunkte d''' zusammenrücken.* (Stimmt wieder mit unserer Relation). *Sie sind daraufhin selber Doppelverzweigungspunkte unserer Fläche*; von den Verzweigungen, welche die drei Punkte d''' mit sich bringen, werden sich nämlich 2 compensiren. —

Ich habe mich von der Richtigkeit dieser Regeln überzeugt, indem ich Beispiele von hinreichender Allgemeinheit in Betracht zog. So behandelte ich in Anm. 10 die Flächen, welche zu den Curven 3. Ordnung gehören (die ja zur 6ten Claſse gehören und also schon zu ziemlich complicirten Flächen Anlaſs geben), ferner den Uebergang von Curven 4. Claſse in Aggregate zweier Kegelschnitte etc. etc. —

Was nun die Abzählung des Zusammenhangs unserer Fläche angeht (die ich ebenfalls in Annalen X allgemein erledigte), so wollen wir uns hier auf gerades k beschränken und mit einer allgemeinen Claſsencurve beginnen:

$$n = k\cdot k-1,\quad t = 0,\quad w = 0$$

welche keinen reellen Zug hat. (Daſs es bei geraden k solche reelle Curven giebt, erläutern wir hier nicht weiter; es wird übrigens im Sommersemester bei den dann zu gebenden Realitätsbetrachtungen völlig entwickelt werden). Da haben wir denn über die ganze Ebene hinerstreckt k Blätter, d.h. $\frac{k}{2}$ Doppelblätter, welche durch d'' Doppelverzweigungspunkte zusammenhängen, wo d'' vermöge unserer Relation:

$$d'' = n - k = \frac{k\cdot(k-2)}{2}$$

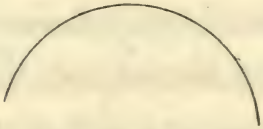
Dies giebt aber als Zusammenhangszahl auf Grund der bei den gewöhnlichen Riemann'schen Flächen üblichen Zählweise:

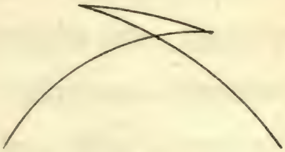
$$-2\cdot\left(\frac{k}{2}\right) + 2 \quad + k\cdot k-2 \quad = \frac{k^2-3k+2}{2},$$

und wenn wir diese Zahl $= 2p$ setzen, so ist

$$p = \frac{k-1\cdot k-2}{2}, \text{ wie es sein soll. —}$$

Aus der hiermit betrachteten Curve lasse man nun durch allmähliche Umänderung der Coëfficienten irgendwelche reelle Curve k^{ter} Classe mit einfachen Plücker'schen Singularitäten entstehen, wobei man den Uebergang so einrichtet, dass man immer nur durch Curven mit einfachen Plückerschen Singularitäten hindurchgeht. Da werden denn zuerst vielleicht complexe Doppeltangenten $2t'''$ oder complexe Wendetangenten $2w''$ entstehen. Ferner können isolirte reelle Doppeltangenten (t'') auftreten und sich in reelle Curvenzüge zerspalten. Der reelle Curvenzug kann einen Doppelpunkt d' und zwei Spitzen r' erhalten, indem ein Doppelpunkt d'' an ihn heranrückt:





Durch Vereinigung zweier reeller Curvenzüge kann eine Doppeltangente t' entstehen. Endlich kann in der bei der Curve 3. Classe betrachteten Weise eine Wendetangente w' hervorkommen. Jede einzelne dieser Aenderungen hat einen Einfluss auf die Zusammenhangszahl unserer Fläche, den wir ohne Weiteres anzugeben vermögen. Wir finden so als Zusammenhangszahl: $(k-1)(k-2) - 2t' - 2t''' - w' - 2w''$. Dies nun setzen wir

$= 2p + w' + 2t''$ und finden so für p, das Geschlecht der idealen Riemann'schen Fläche,

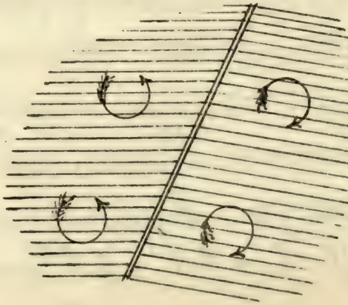
$$p = \frac{k-1 \,.\, k-2}{2} - t - w,$$ wie es sein soll.

[Mi. 24.2.92.]

f. Beziehungen zur Gaussischen $(x+iy)$. Ebene und zur gewöhnlichen ebenen Riemann'schen Fläche.

Wir betrachten jetzt diejenige Fläche, welche im Sinne unserer Verabredung einem einzelnen complexen Puncte zugeordnet ist. Man erinnere sich, daſs der complexe Punct mit seinem conjugirten Puncte zusammen auf einer reellen Geraden liegt. Von allen reellen Puncten der Ebene aus, die dieser Geraden nicht angehören, geht immer ein complexer Strahl nach unserem Puncte hin.

Unsere Fläche wird daher in einer einfachen Ueberdeckung der ganzen Ebene bestehen, für welche der reelle Strahl eine Randcurve vorstellt. Man vergleiche die nebenstehende Figur, in welcher wir durch beigesetzte Pfeile angedeutet haben, daſs wenn die linke Seite unserer Fläche vielleicht der Vorderseite der Ebene angehört,



die rechte Seite der Rückseite angehört. — Unsere Fläche ist ersichtlich einfach zusammenhängend und auf die ideale Fläche des complexen Punctes (des vom complexen Puncte auslaufenden Strahlbüschels) erst dann ein-eindeutig bezogen, wenn man diese ideale Fläche mit einer punctförmigen Oeffnung versieht.

Wollen wir jetzt den complexen Punct, zu welchem wir die Fläche hinzuconstruiren, insbesondere in den einen der beiden Kreispuncte der Ebene (sagen wir: k_1) verlegen. Die reelle Gerade, die den Rand unserer Fläche abgiebt, fällt dann in die unendlich ferne Gerade, und da doch die ganze gerade Linie nur *einem* Puncte der Idealfläche entsprechen soll, so haben wir jetzt eine Ueberdeckung der Ebene vor uns, genau wie die gewöhnliche Theorie von $x + iy$ voraussetzt, nämlich eine *einseitige* Ueberdeckung der Ebene, *bei welcher wir das Unendlich Weite als Aequivalent eines Punctes betrachten*. Aber ich behaupte, daſs die Uebereinstimmung eine noch viel innigere ist, *daſs wir hier geradezu von unseren Festsetzungen aus die gewöhnliche ($x + iy$). Ebene erzeugt haben.* Daſs heiſst natürlich, daſs jetzt der reelle Punct der Ebene einen durch den Kreispunct k_1 gehenden Strahl vorstellt, dem wir gerade diejenige complexe Gröſse als Parameter beilegen können, die wir bei der gewöhnlichen Interpretation von $(x+iy)$ durch den reellen Punct versinnlichen. In der That, der Punct (a, b), durch den wir der gewöhnlichen Deutung zufolge die complexe Grösse $(a+ib)$ interpretiren, ist gerade der reelle Punct des durch k_1 gehenden Strahles: $x+iy = a+ib$.

So ordnet sich also die Gaussische Ebene als specieller Fall unter unsere „neuen" Riemann'schen Flächen ein, sie ist einfach die Fläche des Kreispunctes k_1. Aber auch die gewöhnlichen über der Gaussischen Ebene ausgebreiteten Riemann'schen Flächen können wir mit der Construction unserer „neuen" Flächen in Verbindung setzen. Ich will der Kürze halber unsere Flächen, die doch der reellen Curve in einer durch reelle Projectivitäten unzerstörbaren Weise zugeordnet sind, als „projective" Flächen bezeichnen, und nun zu einer Curve $f(x,y)=0$ in einer neuen Weise durch *metrische* Constructionen eine Riemann'sche Fläche construiren, die weiterhin zur gewöhnlichen Riemann'schen Fläche über der $(x+iy)$-Ebene in einfachster Beziehung stehen soll.

Wir coordiniren nämlich zunächst jedem Puncte x, y von $f(x,y)=0$ den durch ihn gehenden von

K_1 gehenden Strahl. Da jeder Strahl des von K_1 auslaufenden Büschels unsere Curve in n Puncten schneidet (unter n, allgemein zu reden die Ordnung von $f(x,y)=0$ verstanden), so erhalten wir als Bild von $f(x,y)=0$ das n-fach gezählte Büschel: es ist das nichts Anderes, als wir sonst Beziehung der Curve $f(x,y)=0$ auf einen n-fach überdeckten R_1 genannt haben.

Jetzt ersetzen wir jeden Strahl durch seinen reellen Punct, den n-fach gezählten Strahl durch n an der betreffenden Stelle über einander liegende Puncte. So haben wir als Riemann'sche Fläche die n-fach überdeckte Ebene. Verzweigungspuncte der Fläche liegen an den Stellen, von denen aus Tangenten an die Curve gehen, die durch K_1 laufen, also, wenn $f(x,y)=0$ reell ist, an denjenigen Stellen, von denen ebensowohl aus Tangenten an die Curve gehen, die durch den zweiten Kreispunct K_2 laufen. Das sind, der gewöhnlichen Ausdrucksweise der Geometer zufolge, die *Brennpuncte* der Curve $f(x,y)=0$.

Welches ist nun die Beziehung dieser „metrischen" Fläche zur „gewöhnlichen" Riemann'schen Fläche? Unsere Fläche erwächst, indem man jedem reellen oder imaginären Werthsystem (x,y), welches $f(x,y)=0$ befriedigt, den Punct $(x+iy)$ coordinirt, die gewöhnliche Fläche, indem man jedem Werthe von $z = x + iy$, welcher bei der Gleichung $F(s,z) = 0$ betrachtet werden mag, den Punkt $(x+iy)$ entsprechen lässt. Beide Festsetzungen kommen ersichtlich zur Uebereinstimmung, sobald man setzt:

$$z = x + iy,\quad s = x - iy,\quad \text{d.h. } x = \frac{z+s}{2},\quad y = \frac{z-s}{2i},$$

$$F(s,z) = f(x,y).$$

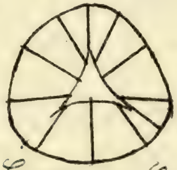
Wir können also sagen, dass die gewöhnliche Fläche von unserer metrischen Fläche nicht eigentlich verschieden ist: wir müssen nur, ehe wir die letzte construiren, $F(s,z)$ in $f(x,y)$ umsetzen. So ist denn die gewöhnliche Riemann'sche Fläche über der z-Ebene ebenfalls mit unserer projectiven Construction in Verbindung gesetzt.

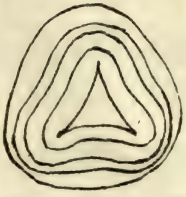
Sie erscheint dabei wohlverstanden nicht als ein specieller Fall der projectiven Fläche (wie es die Gaussische Ebene that), vielmehr tritt ja als neues Moment für unsere Construction die Beziehung der Punkte von $f(x,y) = 0$ auf die durch K, hindurchlaufenden Strahlen hinzu. Wollen wir beide Flächen, die „metrische" und die „projective", coordiniren, so müssen wir sie beide als Specialfälle einer allgemeinen Fläche ansehen. Man erhält die letztere ersichtlich folgendermassen: Neben die Curve n^{ter} Ordnung $f(x,y) = 0$ stellen wir die Curve K'ter Claſse $\varphi(u,v)=0$ und beziehen nun jeden Punkt (x,y) von f auf jede durch ihn hindurchgehende Tangente von φ. Nun construiren wir, indem wir jede Tangente von φ durch ihren reellen Punkt ersetzen, die zu φ gehörige projective Fläche, und überdecken dann diese Fläche den n-Schnittpunkten entsprechend, welche die einzelne Tangente mit $f=0$ gemein hat, n-fach. *Wir haben die projective Fläche von $\varphi=0$ in einfacher Ueberdeckung, sobald wir $n=1$ nehmen, die metrische Fläche von $f=0$ (natürlich in projectiver Verallgemeinerung), sobald wir $K'=1$ nehmen.* Es scheint interessant, sich mit dieser neuen Fläche eingehender zu beschäftigen. Was ist ihr p? Kann dieselbe bei besonderer gegenseitiger Lage von $f=0$ und $\varphi=0$ reducibel werden? Kann man die n-fache Ueberdeckung der zu $\varphi=0$ gehörigen projectiven Fläche beliebig annehmen, und dann rückwärts die zugehörige Curve $f(x,y)=0$ construiren? [Uebertragung des bei den ebenen Flächen wohlbekannten Riemann'schen Existenztheorems].

g Functionen auf der „projectiven" Fläche.

Wir hatten bislang unsere projective Fläche nur dazu benutzt, um das p der zugehörigen Curve abzuzählen. Aber es ist klar, daſs wir ebensowohl auf ihr den Verlauf irgend welcher zu den Curvenpuncten gehörigen Function studiren können, und wir nutzen die unmittelbare Beziehung, welche zwischen unserer Fläche und dem Verlauf der Curve besteht, erst vollends aus, wenn wir dies an einzelnen Beispielen wirklich ausführen. Ich darf in Bezug hierauf auf meine Arbeiten in Bd. 7 und 10 der Annalen verweisen.

In Bd. 7 untersuche ich beispielsweise den Verlauf des überall endlichen elliptischen Integrals $w = u + iv$ bei den zweitheiligen Curven dritter Claſse, und zeige, daſs die Curven $u =$ Const. auf der projectiven Fläche einfach durch die geradlinigen Tangenten des dreispitzigen Curvenzuges ausgeschnitten werden, während die Curven $v =$ Const. ovale Gestalt haben:


Curven $u =$ Const.


Curven $v =$ Const.

Harnack hat das in Ann. 9 eingehender verfolgt. – In Bd. 10 studire ich sodann in analoger Weise den Verlauf der überall endlichen Integrale an der Curve vierter Claſse vom Geschlechte 3: ich leite daraus für diese Curven eine Reihe von Realitätstheoremen ab, die wir in dieser Vorlesung erst im Sommersemester werden besprechen können, wo wir im Besitz des Abel'schen Theorems sind.

Hier wollen wir einen anderen Punkt erläutern. Als wir zu Anfang des Semesters auf den gewöhnlichen (ebenen oder nicht ebenen) Riemann'schen Flächen complexe Functionen, oder vielmehr zunächst Potentiale definirten, geschah das durch die partielle Differentialgleichung:

$$\frac{\partial \dfrac{F\frac{\partial u}{\partial q} - G\frac{\partial u}{\partial p}}{\sqrt{EG-F^2}}}{\partial p} + \frac{\partial \dfrac{F\frac{\partial u}{\partial p} - E\frac{\partial u}{\partial q}}{\sqrt{EG-F^2}}}{\partial q} = 0$$

die als Covariante des das Bogenelement definirenden Differentialausdrucks

$$ds^2 = E\,dp^2 + 2F\,dp\,dq + G\,dq^2$$

anzusehen war, oder auch, da ein gemeinsamer Factor von E, F, G in der partiellen Differentialgleichung wegfällt, als Covariante der Differentialgleichung:

$$E\,dp^2 + 2F\,dp\,dq + G\,dq^2 = 0,$$

durch welche die auf der Fläche verlaufenden Minimalcurven definirt werden. Für die gewöhnliche ebene R. Fläche wird diese Differentialgleichung

$$dx^2 + dy^2 = 0$$

und stellt die durch die Kreispunkte gehenden Geraden vor. Nun lernten wir doch eben, das die Beziehung zwischen der gewöhnlichen ebenen Riemann'schen Fläche und unserer projectiven Fläche die ist, daſs den durch

K_1 (oder K_2) laufenden Geraden dort die geradlinigen Tangenten der Curve hier entsprechend gesetzt werden. Wir schlieſsen daraus folgendes:

Bei der projectiven Fläche tritt an die Stelle der Differentialgleichung $\mathfrak{E}\,dp^2 + 2\,\mathfrak{F}\,dp\,dq + \mathfrak{G}\,dq^2 = 0$ in jedem einzelnen Blatte diejenige Differentialgleichung zweiten Grades, welche die beiden von dem gerade betrachteten Puncte auslaufenden imaginären Curventangenten vorstellt, die zu unserem Blatte, bez. dem conjugirten Blatte zugehören. Ist also vielleicht $\varphi(u_1, u_2, u_3) = 0$ die Claſsengleichung unserer Curve, so setze man zunächst, um die sämmtlichen vom Puncte (x_1, x_2, x_3) auslaufenden Tangenten zu haben:

$$u_1 = x_2\,dx_3 - x_3\,dx_2$$
$$u_2 = x_3\,dx_1 - x_1\,dx_3$$
$$u_3 = x_1\,dx_2 - x_2\,dx_1$$

oder auch, um kein überflüſsiges Differential zu haben, indem man $dx_3 = 0$ nimmt:

$$u_1 = -x_3\,dx_2$$
$$u_2 = x_3\,dx_1$$
$$u_3 = x_1\,dx_2 - x_2\,dx_1.$$

Die entstehende Gleichung

$$\varphi(-x_3\,dx_2,\ x_3\,dx_1,\ x_1\,dx_2 - x_2\,dx_2) = 0,$$

die in dx_1, dx_2 homogen vom K^{ten} Grade ist, spalte man jetzt, soweit sie sich im Reellen spalten läßt, in reelle Factoren ersten oder zweiten Grades. *Zu jedem Blatte unserer projectiven Fläche zusammen mit dem ihm conjugirten Blatte wird eine nicht weiter spaltbarer quadratischer Factor zugehören, und dieser Factor gleich Null gesetzt wird uns die Differentialgleichung zweiten Grades liefern, welche zwecks Definition der auf der Fläche verlaufenden Potentiale und Functionen an Stelle der Gleichung* $Edp^2+2Fdpdq+Gdq^2=0$ *zu setzen ist.*

Dabei tritt dann die interessante Thatsache auf, daß die linke Seite der quadratischen Gleichung aufhört, eine definite quadratische Form zu sein, sobald wir an einen reellen Curvenzug, bez. eine reelle Wendetangente, oder eine reelle isolirte Doppeltangente herankommen.

k. Fernere Bedeutung der reellen Curvenzüge für unsere Fläche.

Wir werden noch eine letzte Betrachtung an unsere projectiven Flächen anknüpfen. Wodurch unterscheiden sich die Flächen reeller Curven von denjenigen complexer Curven? Dadurch daß sie *symetrisch gebaut sind, daß sie in sich selbst übergehen, wenn man Vorderseite und Rückseite der Fläche miteinander* vertauscht, oder, wie man kurz sagen kann: wenn man die Fläche an der tragenden Ebene spiegelt.

Die reellen Curvenzüge sind dabei solche Curven, die bei der Spiegelung völlig ungeändert bleiben, d.h. die bei der Spiegelung mit allen ihren Punkten festbleiben.

Diese „Spiegelung" ist nun offenbar im Sinne der gerade definirten Differentialgleichung eine „conforme Abbildung" der Fläche auf sich selbst, nur eine solche, bei welcher „Umlegung der Winkel" statt hat. Die „Periode" dieser conformen Abbildung ist natürlich 2, d.h. sie führt, zweimal angewandt, zur Identität zurück.

Wir haben damit einen Ansatz, dessen Allgemeingültigkeit leicht allgemein nachzuweisen ist, den wir aber erst im Sommersemester näher verfolgen wollen. Es wird sich darum handeln, überhaupt symmetrische Riemann'sche Flächen in Betracht zu ziehen, d.h. solche, welche durch eine conforme Abbildung zweiter Art von der Periode zwei in sich übergeführt werden. Dieselben entsprechen, wie man zeigen kann, ganz allgemein den reellen Curven, mögen diese Curven im R_2 oder in irgend welchem anderen Raume gelegen sein. Und insbesondere entsprechen die reellen Curvenzüge der reellen Curve denjenigen Curven der symmetrischen Flächen, die bei der symmetrischen Umformung punktweise festbleiben und daher *zur Umformung gehörige Symmetrielinien* genannt werden können. Unser Zielpunkt wird daraufhin sein, eine allgemeine Theorie der reellen Curven und insbesondere ihrer reellen Züge, für einen beliebig ausgedehnten Raum aus der independent zu entwerfenden Theorie der symmetrischen Flächen abzuleiten. Alles, was wir bislang über die Gestalten reeller ebener Curven gelernt haben, Alles insbesondere, was wir über die ihnen zugehörigen projectiven Flächen entwickelten, muss sich als speciellen Fall unter die allgemeinene hier gemeinte Theorie einordnen.

C. Weitere Verbindung des Plücker'schen Ideenkreises mit der Riemann'schen Theorie. [So. 27. 2. 92.]

Es handelt sich uns jetzt um die Schnittpunktsätze. Indem ich mich (insofern es sich hier nur um die allgemeine principielle Auffassung handelt) auf die allereinfachsten Fälle beschränke, werde ich deren Beziehung zum *Riemann'-Roch'schen Satze* darlegen, und von da aus eine nähere „Determination" der Schnittpunktsätze ableiten, die ganz mit den Entwickelungen übereinstimmt, welche *Bacharach* in seiner Erlanger Dissertation (1881), vergl. auch Annalen 26 (1885)–, für den complicirteren „Cayley'schen Schnittpunktsatz gegeben hat.

d. Formulirung der in Betracht kommenden Schnittpunctsätze.

Wir nehmen $f = 0$ als eine Curve n^{ter} Ordnung; singuläre Puncte dürfen vorhanden sein oder auch fehlen; nur sollen dieselben nicht als Schnittpuncte benutzt werden. Jetzt schneiden wir mit einer Curve m^{ter} Ordnung $\varphi = 0$ und erhalten $m\,n$ Schnittspuncte. Wie groß ist die Constantenzahl dieses Schnittpunctsystems bei einmal gegebener Curve $f = 0$? Und wie viele Bedingungen bestehen also zwischen den $m\,n$ Schnittpuncten? Das ist die ursprüngliche Frage, die sich so beantwortet:

1. So lange $m < n$, geht jedenfalls nur eine Curve m^{ter} Ordnung durch die $m\,n$ Puncte. Eine Curve m^{ter} Ordnung hängt aber überhaupt von $\frac{m(m+3)}{2}$ Constanten ab, was also auch die Constantenzahl des Schnittpunctssystems ist. Hiernach befriedigen die $m\,n$ Puncte

$$m\,n - \frac{m(m+3)}{2}$$ Bedingungen

---

2. Ist $m \geqq n$, so muss man bedenken, dass neben der Curve $\varphi_m = 0$ jede Curve m^{ter} Ordnung $\varphi_m + \psi_{m-n} f_n = 0$ durch dieselben Schnittpuncte geht. Hier enthält der Ausdruck ψ $\left(\frac{m-n+1 \cdot m-n+2}{2}\right)$ Coëfficienten. Ebenso viele der $\frac{m(m+3)}{2}$ Constanten von $\varphi = 0$ kann ich also durch geeignete Annahme von ψ zerstören. Demnach

behalte ich $\frac{m.m+3}{2} - \frac{m-n+1.m-n+2}{2}$ Constante im Schnittpunktsystem und habe *also zwischen den m n Punkten*

$$mn - \frac{m.m+3}{2} + \frac{m-n+1.m-n+2}{2} = \frac{n-1.n-2}{2}$$

Bedingungen.

Die so in den beiden Fällen gefundene Zahl der Bedingungen ist für $m = n-1$ und $m = n-2$ dieselbe Zahl, wir dürfen also die beiden Formeln auch so anwenden, dass wir die Abzählung 1) nur für $m \leqq n-3$ in Anwendung bringen, Formel 2) aber für $m > n-3$. —

Und nun müssen wir die Wendung angeben, welche man den so gewonnenen Sätzen zumeist giebt. Dieselbe geht dahin, dass man sich eine hinreichende Zahl von Punkten des Schnittpunktsystems gegeben denkt und dann sagt: die übrigen sind dadurch bestimmt. Also, um es specieller zu sagen, man behauptet

1) für $m \leqq n-3$: *Von den m n Schnittpunkten sind $mn - \frac{m.m+3}{2}$ durch die anderen festgelegt,*

2) für $m > n-3$: *Von den m n Schnittpunkten sind allemal $\frac{n-1.n-2}{2}$ durch die anderen bestimmt.*

Dieses ist natürlich nur im „Allgemeinen" richtig. Die m n Schnittpunkte ergeben mit ihren Coordinaten m n lineare Gleichung zur Bestimmung der Coëfficienten von $\psi = 0$, und wenn man nun zwischen diesen Gleichun gen sagen wir $\frac{n-1.n-2}{2}$ Abhängigkeiten bestehen, läßt, so wird aus irgend $mn - \frac{n-1.n-2}{2}$ der linearen Gleichungen der Rest von $\frac{n-1.n-2}{2}$ Gleichungen doch nur dann folgen, wenn nicht ein Theil der linearen Abhängigkeiten sich auf die vorweg genommenen $mn - \frac{n-1-n-2}{2}$ Gleichungen wirft.

Um ein Beispiel zu betrachten: Eine feste C_5 habe mit beweglichen C_2 10 Schnittpuncte gemein, zwischen denen werden dann 5 Abhängigkeiten bestehen. Aber werden darum 5 der Puncte jedesmal durch die 5 anderen bestimmt sein? Nur dann, wenn die letzteren 5 nicht auf einer Geraden liegen. Dann gehen nämlich durch diese 5 Puncte ∞^2 Kegelschnitte (aus der festen Geraden und einer beliebigen hinzutretenden Geraden bestehend), und der Rest des Schnittpunctsystems behält noch eine zweifache Beweglichkeit.

Allgemein werden wir sagen: *Unsere letztformulirten Behauptungen sind nur so lange richtig, als durch die vorzugebenden Schnittpuncte nicht mehr Curven m^{ter} Ordnung hindurchgehen, als man nach der Zahl der Schnittpuncte von vorneherein erwarten sollte.*

Die hiermit formulirte Regel wird für große Werthe von m unhandlich; da ist es denn möglich, daß der Riemann-Roch'sche Satz die Bedingung der Gültigkeit unserer Behauptungen, wie wir sehen werden, gerade auf den Rest der Schnittpunkte wirft, der durch die vorgegebenen Schnittpunkte bestimmt sein soll.

b) Verbindung mit den Sätzen der Riemann'schen Theorie zunächst in dem Falle, daſs $f=0$ keine singulären Punkte hat.

Wollen wir die Verbindung mit Riemann herstellen, so müſsen wir in der That auseinanderhalten, ob $f=0$ singuläre Punkte hat, oder nicht; über den Fall, wo solche Punkte vorhanden sind, handeln wir erst sogleich unter c). Ist $f=0$ singularitätenfrei, so werden wir die gewünschte Verbindung sofort haben,

indem wir erstens statt der Schnittpunkte von $\psi=0$ mit $f=0$ die „Formen" $\psi_m(x_1\ x_2\ x_3)$ und insbesondere ihre Nullpunkte „auf $f=0$" betrachten; wir werden hier statt $\psi_m(x_1 x_2 x_3)$ lieber gleich die früher gebrauchte Bezeichnung $g_m(x_1\ x_2\ x_3)$ gebrauchen, — indem wir uns sodann überzeugen, daſs hier die g_m mit den „algebraischen „ganzen" Formen I_m identisch sind (daſs also die Curve $f=0$, wie wir es gelegentlich nannten, eine Elementarcurve ist), —

indem wir endlich die Constanten in I_m, bez. die Beweglichkeit der verschiedenen auf $f=0$ von uns zu betrachtenden Punktgruppen durch den Riemann-

-Roch'schen Satz abzählen.

Da müssen wir vor allen Dingen constatiren, dass die sämmtlichen an der Curve $f = 0$ hinerstreckbaren überallendlichen Integrale sich in der Form darstellen lassen

$$w = \int \frac{g_{n-3}(x_1, x_2, x_3) \cdot |c\,x\,dx|}{\Sigma c_i f_i}$$

In der That: die Zahl der in g_{n-3} willkürlichen Coefficienten, nämlich $\frac{n-2 \cdot n-1}{2}$, ist genau gleich dem von anderer Seite bestimmten p der Curve, und p ist anderseits die Zahl der linear unabhängigen überallendlichen Integrale. Wenn jetzt der Riemann-Roch'sche Satz die „Beweglichkeit" irgendwelcher auf $f = 0$ angenommenen Gruppe von $m \cdot n$ Punkten zu $mn - p + \tau$ bestimmt, *unter τ die Zahl der in den $m \cdot n$ Punkten verschwindenden dw verstanden,* so können wir fortan unter τ *die Zahl der Curven $(n-3)$ter Ordnung verstehen, welche durch die mn Punkte hindurchgehen* (der Formen g_{n-3}, welche in den mn Punkten verschwinden; zwei Formen, welche sich nur durch einen constanten Factor unterscheiden, als gleichwerthig angesehen). Von hier aus überzeugen wir uns dann leicht, dass es genau so viele T_m giebt als g_m, dass also die T_m und g_m unserer Curve $f = 0$ identisch sind. Zwischen den mn Nullpunkten von T_m haben wir dann aber nach dem Riemann-Roch'schen Satze $p-\tau$ Bedingungen, was genau die $\frac{n-1.n-2}{2}$ bez. $mn-\frac{m.m+3}{2}$ Bedingungen sind, von denen der Schnittpunktsatz redet. Damit haben wir nicht nur den letzteren wiedergewonnen, sondern wir sehen auch weshalb eine Fallunterscheidung zu machen ist, jenachdem $m > n-3$ oder $\leqq n-3$ ist: im ersteren Falle ist die Zahl τ der Curven $(n-3)$ter Ordnung, welche durch die mn gehen, nothwendig 0, im zweiten ist sie ebensonothwendig > 0.

Und was nun die Behauptung angeht, [Mi. 2.3.92. dass mit einem Theile der Schnittpunkte der Rest mitbestimmt sei, so wollen wir das hier nur für $m > n-3$ prüfen. Da sollen von den mn Schnittpunkten $\frac{n-1.n-2}{2}$, d.h. gerade p, durch die anderen bestimmt sein. Wird dies richtig sein, oder vielmehr: wann wird es zutreffen? Offenbar dann und nur dann, wenn diese p Punkte auf $f=0$ nicht selbst eine „Beweglichkeit" haben (mit anderen Gruppen von p Punkten „aequivalent" sind). Und dies tritt wieder nach dem Riemann-Roch'schen Satze vermöge der Identität zwischen den Gleichungen $dw = 0$ und $\varphi_{n-3} = 0$ dann und nur dann ein, wenn durch die p Punkte keine Curve $n-3$. Ordnung geht.

Wir werden noch genauer sagen dürfen:

Die p Punkte sind durch die übrigen mitbestimmt, so, fern durch die p Punkte keine Curve $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung geht, und zwar werden des Genaueren die p Punkte noch eine x'-fache Beweglichkeit haben, wenn eben τ' Curven $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung durch dieselben hindurchlaufen.

Es wird kaum nöthig sein, dies noch durch Beispiele zu belegen oder noch für $m \leqq n-3$ Entwickelungen hinzufügen. —

c. Von dem Falle, wo $f=0$ singuläre Punkte hat, die aber nicht als Schnittpunkte benutzt werden sollen.

Dieser Fall ist wohlbemerkt in der Geometrie besonders wichtig, insbesondere, wenn man extreme Voraussetzungen macht, z. B. dass die Curve $f=0$ in mehrere Curven niederen Grades zerfällt. So hat Plücker seiner Zeit den Pascal'schen Satz folgendermaßen bewiesen:

1, 2, 3, 4, 5, 6 sind Punkte eines Kegelschnittes und es kreuzen sich die Geraden $\begin{cases}\overline{1,2} \text{ und } \overline{4,5} \text{ in } 7;\\ \overline{2,3} \text{ und } \overline{5,6} \text{ in } 8;\\ \overline{3,4} \text{ und } \overline{6,1} \text{ in } 9;\end{cases}$ es wird behauptet, dass 7, 8, 9 auf gerader Linie liegen!

Zum Beweise betrachte man die 3 Geraden:

$$\overline{12},\ \overline{34},\ \overline{56} \text{ als eine erste } c_3 \ (f=0)$$

die 3 Geraden $\overline{23}, \overline{45}, \overline{61}$ als eine zweite c_3 $(\varphi=0)$. Die beiden C_3 schneiden sich gerade in den Punkten 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Nun ist unser Kegelschnitt, verbunden mit der Geraden 7, 8 eine dritte C_3, welche durch 8 der genannten Puncte durchgeht, nämlich durch 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Dieselbe muſs also auch durch 9 gehen, und da 9 nicht auf dem Kegelschnitt gelegen sein kann (weil der die Geraden $\overline{34}$ und $\overline{61}$ doch nur je in 3 und 4 bez. 6 und 1 schneiden kann), so muſs 9 auf der Verbindungsgeraden von 7 und 8 gelegen sein, was zu beweisen war.–

Für den algebraischen Beweis der Schnittpunctsätze macht die Ausnahme, daſs $f = 0$ singuläre Puncte hat, die aber nicht als Schnittpuncte figuriren sollen, wie wir schon bemerkten, gar keine Schwierigkeit: der Beweis bleibt wörtlich derselbe, wie in dem Falle, wo $f = 0$ keine Schnittpuncte hat.

Ganz anders ist es aber für die functionentheoretische Betrachtung. Wenn $f = 0$, nachdem es vorher keinen Doppelpunct hatte, einen solchen bekommt, so sinkt sein p um eine Einheit, die Definition der Integrale 1ter Gattung wird eine andere, etc. etc.

Wir haben den ganzen Uebergang schon oben geschildert. Mögen ξ, η die beiden Stellen des Gebildes sein, die sich im Doppelpuncte vereinigen. Dann haben wir oben gesehen:

daſs die „freien" algebraischen Functionen ψ/φ, welche wir ursprünglich auf $f = 0$ studirt haben mögen, in „gebundene" Functionen übergehen, sobald der Doppelpunkt entsteht, nämlich in solche, die in ξ und η denselben Werth haben,

dass eines der p ursprünglichen Integrale 1. Gattung w, ... w_p in das Integral dritter Gattung $\Pi_{\xi\eta}$ übergeht (welches in ξ und η seine Unstetigkeitspunkte liegen hat)

und dass dementsprechend für die „gebundenen" Functionen, die auf der mit Doppelpunkt versehenen $f=0$ existiren, ein „modificirter" Riemann-Roch'scher Satz gilt, in welchem neben den Differentialen erster Gattung dw gleichberechtigt das $d\,\Pi_{\xi,\eta}$ auftritt.

Hiermit ist aber auch schon gesagt, wie so die Schnittpunktsätze bei dem ganzen Uebergange ungeändert erhalten bleiben können. Die Sache ist einfach die, dass die Formen $g_m(x_1, x_2, x_3)$, von denen die Schnittpunktsätze handeln, jetzt zu vergleichen sind mit solchen algebraischen Formen I_m, welche entstehen, wenn man die zu $f=0$ gehörigen gebundenen algebraischen Functionen in Zähler und Nenner spaltet. So endet die ganze Discussion darin, dass die Aufforderung entsteht, man solle sich ausführlicher mit den „gebundenen" algebraischen Functionen beschäftigen, die dadurch auf den Riemann'schen entstehen, dass man sie als Grenzfälle Riemann'scher Flächen von höherem p betrachtet. —

d. Von dem Falle, wo $f = 0$ singuläre Punkte hat, die als Schnittpunkte mit $\varphi = 0$ benutzt werden.

Handelt es sich hier um bloſse Doppelpunkte von $f = 0$, durch welche $\varphi = 0$ einfach hindurchgeht, so ist die Sache natürlich einfach zu erledigen. Von den $p - r$ Relationen, welche im Allgemeinen für die Schnittpunkte einer Curve n^{ter} und m^{ter} Ordnung bestehen werden, wird hier durch jeden Doppelpunkt von f, der als Schnittpunkt figurirt, eine absorbirt werden (die aussagt, daſs in dem Augenblicke, wo ein Schnittpunkt in den Doppelpunkt rückt, deren gleich ein zweiter hineinrückt). Dies ist Alles.

Aber während man zu den Zeiten von Plücker sich mit einer solchen Bemerkung begnügte, hat sich in den letzten 20 Jahren (wohl unter indirectem Einfluſse der Weierstraſs'schen Schule) immer mehr die Tendenz entwickelt, alle möglichen noch so complicirten Fälle wirklich durchzuarbeiten. Hier wäre denn die Stelle, um ganz besonders von den *Nöther*'schen Arbeiten, sowie über die Arbeiten von *Brill* und *Nöther* zu berichten. Wir müſsen uns leider auf ein ganz kurzes Literaturverzeichniſs beschränken.

Zunächst gehören natürlich hierher alle die Arbeiten über den *Nöther'schen Fundamentalsatz*, über die wir schon oben   berichteten, d.h. über die

Frage, wann man die Gleichung einer Curve in die Gestalt $Af + B\varphi = 0$ setzen kann, unter A, B rationale ganze Formen von x_1, x_2, x_3 verstanden.

Dann haben wir im Anschluſse an die Arbeit von Brill und Nöther in Annalen 7 (1874) die wir so oft nannten, der Begriffsbestimmung der „*adjungirten Curven*“ und der für diese geltenden Schnittpunktsätze zu gedenken. *Adjungirt heiſst eine Curve $\varphi = 0$, wenn der Quotient von φ und der Polaren eines beliebigen Punktes c:*

$$\frac{\varphi}{c_1\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + c_2\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + c_3\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}}$$

in jedem singulären Punkte von f endlich bleibt.

Nennt man dann alle Schnittpunkte von $\varphi_m = 0$ mit $f = 0$, die nicht nothwendig in die singulären Punkte fallen, *bewegliche* Schnittpunkte, bezeichnet ferner mit p das Geschlecht der mit ihren singulären Punkten behafteten Curve $f = 0$, endlich mit τ die Zahl der adjungirten C_{n-3}, die durch die beweglichen Schnittpunkte von $f = 0$ mit einer $\varphi_m = 0$ hindurchgehen, *so werden für die beweglichen Schnittpunkte gerade $p - \tau$ Bedingungen bestehen.* (Sie werden eben auf $f = 0$ eine Vollschaar aequivalenter Punktgruppen bilden, die sich für $m = n - 3$ mit der Schaar derjenigen Punktgruppen deckt, die durch $C_1\, dw_1 + \dots C_p\, dw_p = 0$ dargestellt wird).

Endlich nennen wir die neuesten Arbeiten von Nöther über die hier vorliegenden Fragen:

Ann. 15, 1879: *Ueber die Schnittpunktsysteme einer algebraischen Curve mit nicht adjungirten Curven*

Acta 8, 1886: *Ueber die reducibelen algebraischen Curven.*

Von functionentheoretischer Seite ist die allgemeine, hier vorliegende Problemstellung noch nicht aufgenommen worden; es wäre wohl sehr zu wünschen daß das geschähe.

e) Schlußbemerkung.

Wollen wir zum Schluß noch hervorheben, daß die Schnittpunktsätze in wechselnder Benennung das ganze Gebiet der algebraischen Curven durchziehen.

Wenn z. B. die Synthetiker davon ausgehen, daß man jede Curve $f=0$ in die Gestalt $\varphi\psi' - \varphi'\psi = 0$ schreiben kann, d.h. als Schnitt der beiden projectiven Curvenbüschel $\varphi - \lambda\psi = 0$, $\varphi' - \lambda\psi' = 0$ construiren kann (*Chasles*'sche Erzeugungsweise), so liegt dem ein Schnittpunktsatz zu Grunde.

Ebenso ist ein Schnittpunktsatz, speciell für die zu $f=0$ adjungirten Curven, der von Brill und Nöther l.c. sogenannte „Restsatz“. Dieser Restsatz ist gar nichts anderes, als der Restsatz den wir früher betreffs der I aufstellten [p. 166] vorausgesetzt, daß man bewiesen hat, daß die beweglichen Schnittpunkte adjungirter φ_m, wie wir uns eben ausdrückten, jedesmal eine Vollschaar aequivalenter Punktgruppen abgeben*).

D. Weiterbildung der Curventheorie über den Riemann'schen Ideenkreis hinaus.

Natürlich reden wir hier nur von ebenen Curven, die Raumcurven bleiben für das Sommersemester.

Wir unterlaſsen auch, auf die bereits wiederholt genannten Tendenzen zurückzukommen, die sich eine Verschärfung der überkommenen Theoreme zum Ziele setzen, wie wohl dieselben ja eigentlich hier zu rubriciren wären.

Es bleibt dann wesentlich Zweierlei zu nennen:

I. Die Entstehung der Invariantentheorie (dieses Wort in allgemeinster Bedeutung genommen, so daſs nicht nur von Invarianten etc. bei linearen Transformationen, sondern bei beliebigen eindeutigen Transformationen etc. zu handeln sein wird);

---

*) In dem hiermit beendeten Absatze hätte jedenfalls der Bedeutung ausführlicher gedacht werden müſsen, welche das in der Theorie der ebenen Curven herrschende Princip der Dualität für die Riemann'sche Theorie besitzen mag. Man kann das Wesentliche in dieser Hinsicht folgendermaſsen bezeichnen: Vermöge des genannten Princips erscheinen die ∞^2 Punktgruppen, in denen eine ebene Curve n^{ter} Ordnung von den Geraden der Ebene geschnitten wird, coordinirt mit den ∞^2 Gruppen zu je k Punkten, in denen die Curve von den Tangenten berührt wird, die von einem beliebigen Punkte der Ebene auslaufen. Das Princip wäre also jeder $G_n^{(2)}$ der Riemann'schen Fläche eine bestimmte $G_k^{(2)}$ zuzuordnen, und diese beiden Schaaren von Punktgruppen immer nebeneinander zu betrachten.

II. Die Weiterentwickelung deſsen, was man Geometrie auf einer Curve $f = 0$ zu nennen pflegt (Gruppenverhältniſse, die bei den merkwürdigen Punkten der Curve auftreten, allgemeiner: Abzählungsmethoden, zur Festlegung der Anzahl irgendwelcher auf $f = 0$ intereſsirender Punkte).

I. Invariantentheorie ebener Curven. [So. 5.3 92.]

a) Invariantentheorie der linearen Substitutionen

In erster Linie müſsen wir natürlich davon sprechen, daſs man die Grundbegriffe der Theorie: Invariante, Covariante etc. in die Geometrie der Curven eingeführt hat, wobei sich dann zeigte, daſs eine Curve n^{ter} Ordnung für $n > 2$ $\frac{n(n+3)}{2} - 8$ unabhängige absolute Invarianten hat, d.h. eine C_3 hat deren eine, eine C_4 sechs.

Man hat ferner versucht, für die niedersten Curven zum mindesten volle Systeme der zugehörigen invarianten Bildungen aufzustellen, womit man denn aber bald zu Formelgruppen von übergroſser Complicirtheit gelangt ist.

Durchgearbeitet ist in dieser Hinsicht eigentlich nur der Fall der Curven 3. Ordnung, wo Aronhold's Abhandlung 1850 (Crelle 39) den Weg gebahnt hat. Aronhold fand insbesondere, daſs sich alle Invarianten der C_3 aus zwei, S und T, zusammensetzen, von denen die eine von der 4ten, die andere von der 6ten Ordnung in den Coëfficienten ist, und die genau den beiden Invarianten g_2 und g_3 des elliptischen Integrals entsprechen, das man an der C_3 hinerstrecken kann.

Man hat endlich insbesondere Invarianten etc. der ebenen Curven näher untersucht: Die Discriminanten, Tactinvarianten etc. und diejenigen Covarianten, welche gleich Null gesetzt die Heſse'sche Curve, Steiner'sche Curve etc. etc. liefern.

Das Nähere hierzu vergleiche bei Salmon oder Clebsch-Lindemann.

b) Zusammenhang mit der Riemann'schen Theorie.

Wir erinnern vorab daran, welcher Art eigentlich die Beziehung zwischen der ebenen Curve und der im abstracten Sinne zugehörigen Riemann'schen Fläche ist. Es handelt sich darum, daſs den ∞^2 Schnittpunktsystemen, welche die Curve mit der ∞^2 geraden Linien der Ebene liefert, auf der Riemann'schen Fläche eine lineare, zweifach unendliche Schaar von untereinander aequivalenten Punktgruppen entspricht. Umgekehrt wird jede solche Schaar durch eine bestimmte ebene Curve, d.h. genauer durch die Schnittpunktsysteme, welche eine bestimmte ebene Curve mit den

Geraden der Ebene hat interpretirt werden können. Und da wolle man nun betrachten, dass diese Curve von vorneherein projectiv, d.h. im Sinne der linearen Invariantentheorie, betrachtet sein will. denn jeder unserer Punktgruppen ist doch mit jeder anderen gleichberechtigt, und es findet also, geometrisch zu reden, keine Auszeichnung einer unendlich fernen Geraden oder gar bestimmter Coordinatenaxen statt.

Da entsteht denn die Frage, *was die absoluten Invarianten der Curve* für die Riemann'sche Auffassung bedeuten? Offenbar sind die Verbindungen jener der Riemann'schen Fläche selbsteigenthümlichen Constanten, die wir früher die *Moduln* derselben nannten, und derjenigen Constanten, durch die man auf der Fläche die Schaar der Punktgruppen auswählt. Möge nun letztere nur in *einer* Weise vorhanden sein, also, bei einmal gegebener Riemann'scher Fläche, von gar keiner Constanten mehr abhängen. Da ist der Fall der ∞^2 Punktgruppen $d\omega = 0$, welche auf einer Fläche $p = 3$ existiren, beziehungsweise der Fall der allgemeinen Curve 4^{ter} Ordnung. *Da werden die 6 absoluten Invarianten der Curve geradezu als die Moduln angesehen werden können, von denen die Fläche $p = 3$ abhängt.* Und das Heranziehen der Invariantentheorie bedeutet hier also, zunächst für p = 3, daſs wir für die *Moduln* der Riemann'schen Theorie, von denen wir bislang nur eine sehr unvollständige Vorstellung hatten, eine klare Definition erhalten. Dieselbe wird sich ohne Weiteres auf höhere p übertragen lassen, sobald wir Curven in mehrdimensionalen Räumen betrachten wollen. Ueber die Moduln des Falles p = 1 wurde soeben schon eine Andeutung gemacht, doch würde es hier zu weit führen, dieselbe weiter zu verfolgen.

Endlich darf man sagen, daſs die homogenen Variabelen der Invariantentheoretiker, ihre Covarianten mit mehreren Reihen Veränderlicher immer mehr anfangen, auch in der Theorie der an den Curven hinerstreckten Integrale ihre bedeutende Rolle zu spielen. Da ist zunächst überhaupt die *homogene Schreibweise* der Integrale, die auf *Aronhold* zurückgeht und von Clebsch zum Gemeingut der Geometer gemacht wurde:

$$w = \int \frac{\varphi_{n-3}(x_1, x_2 x_3) . |c x d x|}{\Sigma c_i f_i},$$

da ist ferner die algebraische Normirung der Integrale dritter Gattung, wegen deren ich am besten auf meine Arbeit über Abel'sche Functionen in Bd. 36 der Annalen verweise, etc. etc.

Ueberall hat man, wie ersichtlich, die Ansätze zu einer Weiterbildung der Riemann'schen Theorie.

c. Eindeutige Transformationen der Curven.

Bei den eindeutigen Transformationen der Curven ist es nun umgekehrt: da hat die Riemann'sche Theorie der Geometrie erst den richtigen allgemeinen Impuls gegeben. Und zwar schon, was die Fragestellung angeht. Zwei Curven $f(s, z) = 0$ und $f'(s', z') = 0$, die derselben Riemañ'schen Fläche zugehören, sind eben darum durch umkehrbare rationale Transformation verbunden

$$\begin{array}{ll|ll} s' = R'_1(s, z) & & & s = R_1(s', z'), \\ z' = R'_2(s, z), & & & z = R_2(s', z'). \end{array}$$

Dann namentlich, was den Hauptsatz angeht: daſs die beiden Curven daſselbe p besitzen. Es ist das Verdienst von Clebsch 1864 (Ueber die Anwendung der Abel'schen Functionen in der Geometrie, Crelle 63) diese Fragestellung, bez. diesen Satz, von Riemann her in die Curvenlehre übertragen zu haben.

Inzwischen hatten schon vorher die Geometer sich mit eindeutigen Transformationen der ebenen Curven beschäftigt; nur waren es solche Transformationen gewesen, welche nicht nur für die einzelne Curve, sondern für die ganze Ebene eindeutig sind. Das einfachste Beispiel einer solchen Transformation, das schon bei Poncelet vorkommt, ist das Beispiel der sogenannten quadratischen Transformation.

Bei Einführung des richtigen Coordinatendreiecks schreibt sich dieselbe so:

$$y_1 : y_2 : y_3 = \frac{1}{x_1} : \frac{1}{x_2} : \frac{1}{x_3}$$

beziehungsweise oder:

$$\rho y_1 = x_2 \cdot x_3, \qquad \sigma x_1 = y_2 \cdot y_3,$$
$$\rho y_2 = x_3 \cdot x_1, \qquad \sigma x_2 = y_3 \cdot y_1,$$
$$\rho y_3 = x_1 \cdot x_2, \qquad \sigma x_3 = y_1 \cdot y_2.$$

Reiht man mehrere quadratische Transformationen, welche zu verschiedenen Dreiecken gehören, aneinander, so kann man eindeutige Transformationen der Gesammtebene von beliebig hohem Gerade erzielen. *Cremona* hat sich seiner Zeit die Aufgabe gestellt, die allgemeinste eindeutige algebraische Transformation einer Ebene in sich selbst zu bestimmen (Memorie die Bologne 2 ser. t. II, 1862), – daher „Cremona Transformation". *Nöther* aber und unabhängig von ihm *Rosanes* haben bewiesen (Ann. III, p 165 (1870), bez. Ann. V, p. 635 (1872); R. in Crelle 73, p. 107 (1871), daſs jede derartige Transformation aus successiven quadratischen Transformationen zusammen gesetzt werden kann. —

Ich muſs hier einer besonderen Anwendung gedenken, die man in der Theorie der eindeutigen Transformation der Curven gemacht hat, dahingehend: *daſs* *man eine mit beliebigen singulären* Puncten ausgestattete Curve durch eindeutige Transformation allemal in eine solche mit nur einfachen Doppelpuncten verwandelen kann*). Das hat die bequeme Folge, dass man sich bei der Behandlung der Abel'schen Integrale etc. darauf beschränken kann, bei der Grundcurve keine anderen singulären Puncte vorauszusetzen, als eben einfache Doppelpuncte. Daneben bleibt dann immer natürlich die Frage bestehen, *wie* man eine irgendwie vorgelegte Curve in eine Curve dieser einfachen Art transformiren soll. Hier vergleiche man *Nöther*, Rationale Ausführung der Operationen in der Theorie der algebraischen Functionen, Ann. 23, 1883.

Ich will ferner noch darauf hinweisen, dass ausgehend von der Theorie der besonderen auf einer Riemann'schen Fläche möglicherweise existirenden Punctgruppen man neuerdings vielfach ebene Curven mit besonderen Punctgruppen studirt hat, z. B. die hyperelliptischer Curven, die eine ∞^1 Schaar aequivalenter Punktepaare tragen.

---

*) Wo ist der Satz zum ersten Male gedruckt? Mir ist derselbe aus mündlichen Mittheilungen von Kronecker vom Herbst 1869 bekannt. – Dem Satz correspondirt der andere, dass man eine Riemann'sche Fläche immer so über eine Ebene ausbreiten kann, dass sie nur einfache Verzweigungspuncte besitzt, von denen keine zwei übereinanderliegen.

II. Geometrie auf der Curve.

Was Geometrie auf der Curve angeht, so können wir uns ganz kurz faſsen, da hier die von Riemann's Theorie ausgehende Behandlungsweise durchaus in den Vordergrund tritt, was wir ausführlicher erst im Sommersemester entwickeln wollen. Wir haben

a) Von den Gruppirungsverhältniſsen der Singularitäten der Curven zu handeln. Da haben wir von geometrischer Seite die Gruppirungsverhältniſse der Wendepunkte der C_3 [Maclaurin, Plücker, Heſse], sowie der Doppeltangenten der C_4 (Heſse und Steiner in Crelle 49, 1885). Dann aber von Riemann'scher Seite her die schon genannte Abhandlung von *Clebsch*: Ueber die Anwendung der Abel'schen Function in der Geometrie (Crelle 63, 1864), durch welche mit einem Schlage alle die bis dahin bekannten particulären Theoreme unter ein ganz allgemeines einfaches Schema eingeordnet wurden.

Wenn wir

b) Von den allgemeineren Methoden der Abzählung handeln sollen, so muſs ich auf einige geometrischen Lehrbücher wegen der Aufgaben verweisen, die da behandelt werden, und bei denen man sich mit der *Zahl* der Lösungen begnügt, weil es zu schwierig scheint, die algebraischen Gleichungen, durch welche die Lösungen definirt werden, explicit hinzuschreiben.

Wir handeln hier nur von der Abzählung besonderer Punkte auf einer gegebenen Curve $f=0$. Und in dieser Hinsicht hat Chasles einen besonderen Ansatz geschaffen, indem er auf $f=0$ sogenannte Correspondenzen betrachtete, d.h. Abhängigkeiten zwischen 2 Curvenpunkten x und y, derart, dafs jedem Punkte x β Punkte y, jedem Punkte y α Punkte x entsprechen. Ist dann für die Curve $p=0$, so hat man auftr $(\alpha+\beta)$ „Coïncidenzen", ein Satz, den Chasles als „Correspondenzprincip" bezeichnet (Comptes Rendus t. 62, 1864). An diesem Satz ist kaum etwas zu beweisen. Denn führt man den Parameter λ ein, durch dessen Werth sich die Punkte x, y von $f=0$ (im vorliegenden Falle $p=0$) eindeutig darstellen, so wird die Correspondenz nothwendig durch eine algebraische Gleichung $\varphi(\lambda_x, \lambda_y)=0$ gegeben sein, die natürlich, wenn man $\lambda_y = \lambda_x$ setzt, $\alpha+\beta$ Werthe von λ_x liefert. Nicht dafs Chasles das Correspondenzprincip der Curven $p=0$ bewiesen hat, sondern dafs er die ganze Fragestellung geschaffen und die Anwendbarkeit des Correspondenzprincips bei zahlreichen Abzählungsaufgaben gezeigt hat, das ist seine Leistung.

Anders ist es mit dem Princip, wie es Cayley bald danant für Curven mit $p > 0$ formulirte (C. R. t. 62, 1864; Proceedings London Math. Society vol. I, 1866; Philosophical Transactions 158, 1868). Cayley giebt die Formel ($\alpha + \beta + 2p\gamma$), wobei γ ein Attribut der Correspondenz bezeichnet, welches wir hier in Kürze nicht definiren können. *Dies ist ein wirklich neuer algebraischer Satz, deſsen Richtigkeit zu prüfen bleibt.* Dieser Prüfung hat sich dann von geometrischer Seite insbesondere Hr. Brill unterzogen; vergl. Ann. VI, 1873; VII 1874; 31, 1887; 36, 1890. (Vergl. auch eine Arbeit von Zeuthen, die demnächst in Ann. 40 erscheint.)

Und hier ist es nun Hr. *Hurwitz*, welcher die Principien der Riemann'schen Theorie mit gröſstem Erfolge herangezogen hat. (Math. Ann. 28, 1886). *Nicht nur daſs er durch Verwendung der Abel'schen Functionen die von Cayley-Brill benutzte Darstellung der allgemeinen Correspondenzen als eine nothwendige kennzeichnen und übrigens einen einfachen Beweis der Formel ($\alpha + \beta + 2p\gamma$) geben konnte, er hat insbesondere gefunden, daſs sich neben diese allgemeinen Correspondenzen unter Umständen andere, singuläre stellen und hat auch deren Theorie völlig erschöpft.*

Der Bericht über die Einzelheiten dieser Hurwitz'schen Arbeit wird eine weitere Aufgabe für das Sommersemester sein, für welches ich überhaupt folgende Disposition in Aussicht nehme: (vergl. p. 228)

1) Eine Einleitung, in welcher wir über Raumcurven (eines beliebig ausgedehnten Raumes) in ähnlicher Weise referiren, wie es jetzt über ebene Curven geschehen ist,

2) die Besprechung dreier ausgewählter Kapitel der Riemann'schen Theorie. Wir behandeln:

a) Die Theorie der symmetrischen Flächen und also der reellen algebraischen Gebilde, – in weiterer Instanz die allgemeine Theorie der Riemann'schen Flächen mit eindeutigen Transformationen in sich,

b) Clebsch' Anwendung der Abel'schen Functionen,

c) Hurwitz' Correspondenztheorie.

Riemann'sche Flächen

II.

Vorlesung

von

F. Klein,

gehalten während des Sommersemesters 1892.

Zweiter Abdruck.

GÖTTINGEN 1894.

Inhalts-Verzeichniss.

Zunächst Fortsetzung des schon im Winter begonnenen **„Zweiten Theils“** der Gesammtordnung.

Seite

II. Allgemeiner Bericht betr. algebraische Raumcurven.

A. Die älteren Arbeiten (bis ca. 1870).

Vorbemerkungen 1

1. Niederste Raumcurve oder sonst specielle Raumcurve.

Voller und theilweiser Schnitt zweier Flächen, Beispiele, Rationalitäts- und Integritätsbereich einer Raumcurve 3
Parameterdarstellung: Kegel und Monoid 11
Curven, welche durch Matrices definirt werden 14
Curven auf Flächen 2. und 3. Ordnung 17

2. Nähere Untersuchung der Raumcurven.

Cayley's Uebertragung der Plücker'schen Formeln 26
Erläuterungen zum Chasles'schen Correspondenzprinzip 32
Anwendung des Princips auf Raumcurven 39
Das Cayley-Brill'sche Correspondenzprinzip und das Princip der speciellen Lage 41
Zugehörige analytische Ansätze 49
Schnittpunctsätze bei Raumcurven 52
Realitätsverhältnisse 57

B. Die neuere Periode (von 1870 an).

1. Einführung neuer Ideen.

Das Heranziehen der Riemann'schen Sätze. Clebsch 68
Die Arbeit von Brill und Nöther im 7. Annalenbande 70
Kritische Bemerkungen, alg. Functionen zweier Variabeler 79
Mehrdimensionale Anschauungsweisen 85
Programm einer allgemeinen Theorie der alg. Curven 87

2. Durchführung des neuen Programms.

Von den allgemeinen Normalcurven, bes. für $p=0,1$ 91
Von der Normalcurve der φ (bei $p > 1$):
Der hyperelliptische Ausnahmefall 98
Weierstrass' Bestimmung der Moduln 101
Einwände und Ergänzungen 105

Seite
Von den Flächen, welche durch die Normalcurve der φ gehen 110
Allgemeines über das Problem der Specialgruppen 114
Von der Anzahl der Specialgruppen: Die Methode von Castelnuovo . . . 122
Von dem Problem der Theilcurven 130

Dritter Theil: Von den symmetrischen Riemann'schen Flächen (unter theilweiser Benutzung der Abel'schen Functionen).

I. Elementarer Theil der Theorie.

A. Definition der symmetrischen Flächen und Stellung derselben innerhalb der Riemann'schen Theorie 131

B. Aufzählung aller symmetrischen Flächen.

$p = 0$ und die hyperelliptischen Fälle 138
Ueberhaupt $[p+1]$ diasymmetrische, $\left[\frac{p+2}{2}\right]$ orthosymmetrische Arten . . . 143
Wesen des Artbegriffs, Abzählung der zugehörigen Moduln 150
Die „hyperelliptische" und die „Doppelpuncts-"Methode 156

C. Beziehungen der symmetrischen Flächen zur Curvenlehre.

Generelle Normalcurven 158
Die Normalcurve der φ; Einordnung der hyperell. Fälle 163
Nähere Angaben über $p = 3$ und $p = 4$ 167
Controle der Angaben durch die Doppelpunctsmethode 175

D. Von dem Problem der Φ.

Die allgemeine algebraisch-analytische Theorie 180
Bestätigungen bei $p = 3$ 183
Desgleichen bei $p = 4$ und $p > 4$ 187
Das allgemeine Realitätstheorem 192
Erläuterungen und Beweise für $p = 3$ 196
Desgleichen für $p = 4$ und $p > 4$ 199
Ein besonderes Realitätstheorem für das einzelne Oval bei $p = 4$ 206

II. Heranziehen der Abel'schen Functionen.

A. Die allgemeine Grundlage.

Das Abel'sche Theorem und seine Umkehr 215
Das Umkehrproblem und das Umkehrtheorem 219
Von der Bestimmung der Berührungsflächen F 223
Charakteristiken, Gruppirungssätze 228
Verallgemeinerungen 231

B. Von den Thetafunctionen.

Definition, Functionaleigenschaften, Potenzentwickelung 232
Zusammenhang mit den Φ, insbes. im hyperelliptischen Falle 238
Primcharakteristiken 244

Seite
C. Realitätsdiscussion vom hyperelliptischen Gebilde aus 247

D. Directe Realitätsdiscussion der F, bez. der Φ, in den orthosymmetrischen Fällen.

Anschluss an Weichold: Symmetrisches Schnittsystem 252
Das Periodicitätsschema der zugehörigen Normalintegrale 257
Die Realität der F 263
Die Realität der Φ: Erbringung der früheren Resultate 269

E. Directe Realitätsdiscussion der F, bez. der Φ, in den diasymmetrischen Fällen.

Referat über Weichold, nebst Folgerungen 272

F. Von der Vertheilung der Charakteristiken auf die einzelnen Schaaren reeller F, bez. die reellen Φ.

Allgemeines, Durchführung der hyperelliptischen Methode 276
Bemerkung zu Hurwitz, Crelle 94 284
Schlussbemerkungen 285

[Mo. 25. 4. 92.]

Die Zielpunkte der Vorlesung, welche ich hiermit beginne, sind alle schon im vergangenen Wintersemester dargelegt worden, und es ist sogar schon eine vorläufige Disposition gegeben worden; wir gehen also gleich in medias res. Indem wir uns auch in der Nummerirung der Abschnitte etc. an das Wintersemester anschliessen, wird uns als zweites Kapitel des zweiten Haupttheils zunächst zu beschäftigen haben:

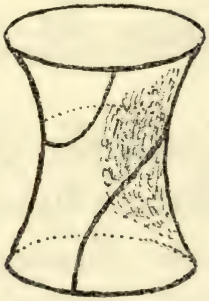
II Allgemeiner Bericht, betreffend algebraische Raumcurven.

Und zwar erbringen wir zunächst

A. Historisches über die älteren Arbeiten bis ca. 1870.

Das Jahr 1870 mag hier als ungefähre Gränze gelten, weil damals erst die ernstlichen Versuche begannen, die Riemann'sche Theorie in die Lehre von den Raumcurven einzuführen, und weil der Standpunkt, welcher damals herrschte, durch die Lehrbücher, nämlich *Salmon's* Raumgeometrie und *Cremona's* Theorie der Oberflächen, wie auch die Vorlesungen von *Clebsch* (die in ihren hier in Betracht kommenden Theilen leider noch nicht herausgegeben sind) auch heute noch leicht zugänglich ist.

Raumcurven sind schon von *Monge* (um 1800) ausführlich betrachtet worden. Aber sein Intereſse betraf solche Fragen, welche mit der Anwendung der Differential- und Integral-rechnung zusammenhängen, wie Krümmungsverhältniſse etc. Da ist denn unwesentlich, ob die Raumcurve algebraisch ist; der Schwerpunkt liegt darauf, daſs sie analytisch ist. Die Theorie der *algebraischen* Raumcurven beginnt erst 1827 mit *Moebius barycentrischem Calcul*, in welchem zum ersten Male die einfachste Raumcurve, die es überhaupt giebt, nämlich die *Raumcurve dritter Ordnung* betrachtet worden ist. Wollen Sie betreffs derselben vorläufig folgendes Bild festhalten:



Die Raumcurve erscheint hier auf einem einschaligen Hyperboloid gelegen, wobei sie die Erzeugenden der einen

Schaar je in einem, die Erzeugenden der anderen Schaar je in 2. Punkten trifft. Eine andere Art alg. Raumcurven, die man frühzeitig betrachtet, sind die sogenannten

Raumcurven vierter Ordnung erster Species, d.h. die Durchdringungscurven zweier Flächen zweiten Grades.

In der That hat man ja in der darstellenden Geometrie, den Bedürfnissen der Praxis entsprechend, unausgesetzt mit solchen Raumcurven zu thun (Durchdringungscurven zweier Rotationscylinder etc.) Man vergleiche, wie auch wegen der Raumcurven dritter Ordnung, *Chasles' Aperçu historique* (1837). Aber erst um das Jahr 1850 nahm die Theorie unter den Händen der englischen Geometer *Cayley* und *Salmon* einen höheren Aufschwung. Derselbe Band V des Cambridge und Dublin Mathematical Journal (1850) bringt eine Arbeit von Salmon aus dem Jahre 1849 über die Classification der Raumcurven, und Cayley's Uebertragung der Plücker'schen Formeln auf dieselben (die übrigens schon 1846 in Bd. X von Liouville's Journal vorher publicirt war). Indem wir uns an die Entgegenstellung dieser beiden Arbeiten anschliessen, handeln wir hier

ad 1) Von der Aufzählung der niedersten Raumcurven oder sonst specieller Raumcurven.

Zwei Charactere sind es, welche Salmon dabei hauptsächlich in Betracht zieht: Die Ordnung n. und die Zahl h der scheinbaren Doppelpunkte. Hauptbeweismittel ist der Satz, daſs eine Curve n^{ter} Ordnung von einer Fläche m^{ter} Ordnung in $m\,n$ Punkten geschnitten wird. Warum ist dieser Satz richtig? Warum giebt es überhaupt etwas wie „Ordnung" einer algebraischen Raumcurve? Die englischen Geometer der damaligen Zeit haben sich um derartige, principielle Fragen nur wenig Sorge gemacht; von unserem Riemann'schen Standpunkte aus beantworten wir sie sofort. In der That wird

$$\frac{F_m(x_1\,x_2\,x_3\,x_4)}{x_4^m}$$

eine „algebraische Function" auf der Curve sein müſsen, und eine solche hat ebensoviele Nullpunkte als Unendlichkeitspunkte; $F = 0$ verschwindet also in $m\,n$ Punkten, wenn die unendlich ferne Ebene in n Punkten schneidet. Andererseits bemerke man, daſs die Zahl h mit dem Riemann'schen p auf das Engste zusammenhängt: Da die Centralprojection unserer Curve auf irgendwelche Ebene eine C_n mit h Doppelpunkten ist, so ist

$$p = \frac{n-1\,.\,n-2}{2} - h.$$

Salmon betrachtet nun erstlich die volle Schnittcurve zweier Flächen μ^{ter} und ν^{ter} Ordnung: $F_\mu = 0$ und $F_\nu = 0$.

Offenbar ist hier

$$n = \mu - \nu.$$

Aber wie groß ist h? Sei F_μ symbolisch $= a_x^\mu$, $F_\nu = b_x^\nu$. Sei ferner x ein Punkt der Curve, y irgend ein Raumpunkt. Soll dann $x + \lambda y$ der F_μ angehören, so bekommen wir für λ die Gleichung:

$$\mu \cdot a_x^{\mu-1} a_y \cdot \lambda + \frac{\mu \cdot \mu-1}{2} a_x^{\mu-2} a_y^2 \cdot \lambda^2 + \ldots\ldots a_y^\mu \cdot \lambda^\mu = 0,$$

soll es der F_ν angehören, so entsteht

$$\nu \cdot b_x^{\nu-1} b_y \cdot \lambda + \frac{\nu \cdot \nu-1}{2} b_x^{\nu-2} b_y^2 \cdot \lambda^2 + \ldots\ldots b_y^\nu \cdot \lambda^\nu = 0.$$

Wir trennen von den beiden Gleichungen die Wurzel $\lambda = 0$ ab und verlangen, daß sie nunmehr noch eine Wurzel λ gemein haben sollen. In der That ist dann die Gerade $\overline{xy}$ eine Secante der Raumcurve und unsere Frage ist doch gerade, wie viele solcher Secanten durch den Punkt y gehen. Nun giebt die Elimination von λ zwischen den beiden Gleichungen das Resultat:

$$\begin{array}{r|llll|l}
\text{($\nu-1$) Zeilen!} & a_x^{\mu-1} a_y & \frac{\mu-1}{2} a_x^{\mu-2} a_y^2 \ldots\ldots a_y^\mu & 0 \ldots\ldots 0 & & \\
 & 0 & a_x^{\mu-1} a_y \ldots\ldots\ldots\ldots a_y^\mu & \ldots\ldots 0 & & \\
 & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & & = 0 \\
\text{($\mu-1$) Zeilen!} & b_x^{\nu-1} b_y & \frac{\nu-1}{2} b_x^{\nu-2} b_y^2 \ldots\ldots b_y^\nu & 0 \ldots\ldots 0 & & \\
 & 0 & b_x^{\nu-1} b_y \ldots\ldots\ldots\ldots b_y^\nu & \ldots\ldots 0 & & \\
 & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & &
\end{array}$$

d.h. eine Gleichung

$$F(x|y) = 0,$$

welche in x vom Grade $(\mu-1)(\nu-1)$ ist, (wie z. B. das Diagonalglied der Determinante zeigt). Daher ist die Anzahl der Punkte x, die mit y verbunden eine Secante unserer Raumcurve liefern

$$\mu\nu(\mu-1)(\nu-1),$$

und da jede Secante zwei solche Punkte x trägt, wird schlieſslich:

$$h = \frac{\mu\nu}{2.}(\mu-1)(\nu-1).$$

Hier die Charactere der niedersten Fälle:

μ	ν	$\mu\nu$	h	p	
2	2	4	2	1	
2	3	6	6	4	
2	4	8	12	9	
3	3	9	18	10	

Aber man erkennt zugleich (indem in dieser Tabelle beispielsweise die Raumcurven dritter Ordnung fehlen), *daſs nicht jede Raumcurve eine volle Schnittcurve (zweier Flächen) sein kann.* Und hiermit, mit der Frage nach den unvollständigen Schnittcurven treten wir nun in den intereſsanteren Theil unseres Gebietes.

Bemerken wir übrigens vorläufig, daſs auch eine sogenannte unvollständige Schnittcurve, sofern man sie nur *mehrfach zählen* will, den ausschlieſslichen Schnitt zweier

Flächen ausmachen kann. Hat man zum Beisp. eine Linienfläche dritter Ordnung und legt von einem beliebigen Punkte an die Fläche den Umhüllungskegel, so erscheint derselbe als Kegel zweiten Grades, und Fläche und Kegel berühren einander dann entlang einer Raumcurve dritter Ordnung! — Solche „Berührungsschnitte" sind indeſs seitens der Geometer bislang nur erst gelegentlich betrachtet worden: Die Methode, deren man sich durchweg bedient, um unvollständige Schnittcurven von den hindurchgehenden Flächen aus zu erzeugen, ist die, daſs man die Flächen durch eine bereits bekannte Curve hindurchlegt und dann nach dem *Restschnitte* fragt.

Möge also die Durchdringungscurve von $F_\mu = 0$ $F_\nu = 0$ in zwei Curven mit den Characteren n', h' und n'', h'' zerfallen. Dann ist erstlich $n' + n'' = \mu\nu$.

Wir bezeichnen ferner mit H die *scheinbaren* Schnittpunkte, welche die beiden Curven von einem Raumpunkte y gesehen besitzen, — die *wirklichen* Schnittpunkte, welche sie besitzen mögen, zählen wir dabei ausdrücklich nicht mit. Dann wird die eben berechnete Gleichung $F(x|y) = 0$ auf C' augenscheinlich $2h' + H$, auf C'' $2h'' + H$ Punkte festlegen, so daſs wir die beiden Gleichungen bekommen:

$$2h' + H = n'(\mu-1)(\nu-1), \qquad 2h'' + H = n''(\mu-1)(\nu-1)$$

Die Zahl der wirklichen Schnittpunkte, welche C' u. C'' besitzen werden, berechnet man hinterher als

$$n' n'' - H. \text{ —}$$

So erscheint beispielsweise unsere C_3 ($h=1$) zusammen mit einer geraden Linie, also einer C_1^0 ($h=0$), welche sie zweimal trifft, als mögliche Form des Durchschnitts zweier Flächen 2ten Grades.

[Fr. 28. 4. 92]

Salmon hat von hier aus insbesondere die Raumcurven 4ter Ordnung untersucht. Dabei tritt neben die volle Durchschnittscurve zweier Flächen zweiten Grades die sog. Raumcurve vierter Ordnung erster Species, mit den Characteren:

$$\mu = 2, \ \nu = 2; \quad h = 2, \ p = 1$$

Die Raumcurve vierter Ordnung zweiter Species:

$\mu = 2$, $\nu = 3$; Abtrennung zweier windschiefer Geraden von der Schnittcurve; $h = 3$, $p = 0$.

Hier ferner die von Cayley (siehe unten) gegebene Aufzählung der Raumcurven fünfter Ordnung:

	μ	ν	Restschnitt	h	p.
I	2	3	Eine C_1 trennt sich ab.	4	2
II	2	4	Drei windschiefe C_1^0	6	0
III	3	3	Eine C_4 der ersten Species	5	1
IV	3	3	Eine Raumcurve 3. Ordnung u. eine sie nicht treffende Gerade	6	0

Die Arten II und IV, welche in der Zahl der scheinbaren Doppelpunkte übereinstimmen, unterscheiden sich dabei durch die Constantenzahl, welche bei II 19, bei IV aber 20 beträgt; II kann als specieller Fall von IV aufgefaſst werden. –

Es ist in der That nicht schwer, bei diesen niederen Werthen von n die Vollständigkeit der Aufzählung zu controliren. Man überlege sich einfach, in wie vielen Punkten eine C_n von einer F_μ geschnitten wird, und durch wie viele Punkte umgekehrt man sicher eine F_μ hindurchlegen kann. Ist letztere Zahl gröſser als erstere, so liegt die C_n sicher auf einer und ev. auf mehreren F_μ, – vorausgesetzt, daſs die C_n irreducibel ist, wie wir hier selbstverständlich annehmen. Aber bei höheren Werthen von n kommt man mit solchen einfachen Ansätzen nicht mehr durch.

Man muſs da principieller zu Werke gehen, als es seiner Zeit die englischen Geometer thaten (welche bei diesen Untersuchungen die inductive Methode handhabten).

Ich nenne beispielsweise folgende zwei Fragen, die man die Fragen nach dem *Rationalitätsbereiche* und nach dem *Integritätsbereiche* einer Raumcurve nennen könnte:

1) Wie viele Flächen sind jedenfalls hinreichend, um

eine Raumcurve rein darzustellen?

2) Wie viele Flächen $f_1 = 0, f_2 = 0 \dots \dots f_\varrho = 0$ muſs man unter den durch eine Raumcurve hindurchgehenden Flächen herausgreifen, damit jede andere durch die Curve gehende Fläche $F = 0$ die Darstellung gestatte:

$$F = M_1 f_1 + M_2 f_2 + \dots \dots \dots M_\varrho f_\varrho$$

unter $M_1, M_2, \dots\dots$ rationale ganze Multiplicatoren verstanden?

Hier ist No 1) leicht dahin zu beantworten (wie das beispielsweise *Kronecker* in seiner Festschrift von 1882, Crelle 92, thut), daſs immer 4 Flächen zur reinen Darstellung einer Raumcurve ausreichen; wir kommen bald darauf noch zurück.

Demgegenüber hat No 2) einen wesentlich höheren Charakter. *Kronecker* hat l. c., wie anderseits *Hilbert* in Math. Ann. 36 bewiesen, daſs man auf alle Fälle mit einer *endlichen* Zahl von Flächen $f_1 = 0, \dots\dots f_\varrho = 0$ reicht. Dabei dringt Hilberts Entwickelung wesentlich tiefer ein, indem er durchweg mit homogenen Variablen operirt. Kronecker's Satz würde richtig sein, wenn man das einzelne $F(x_1, x_2\ x_3\ x_4)$, das entlang der Curve verschwindet, nicht selbst in der Gestalt $M_1 f_1 + \dots\dots M_\varrho f_\varrho$ darstellen könnte, sondern erst nach Multiplication mit einer geeigneten Potenz von x_4. Geometrisch hieſse das, daſs man der Fläche $F=0$ um die gewünschte Darstellung durch $f_1 \ldots\ldots f_\varrho$ zu ermöglichen, noch die unendlich weite Ebene mit einer gewiſsen Multiplicität zufügen müſste. Hilbert's Entwickelung beweist, daſs man diese Potenz von x_4 einsparen kann. –

Doch ich kehre zu meinem historischen Referate zurück. Neben die Darstellung der Raumcurve durch ihre *Gleichungen* $F_\mu=0$, $F_\nu=0$, ..., von der Salmon ausging, tritt als zweite Methode die *Parameterdarstellung* derselben. Eben durch eine solche Parameterdarstellung führt Moebius in seinem barycentrischen Calcul zuvörderst die „rationalen" Raumcurven ein; er setzt die homogenen Coordinaten x_1 x_2 x_3 x_4 eines Punktes der Raumcurve mit Polynomen $\varphi_1(\lambda)$, $\varphi_2(\lambda)$, $\varphi_3(\lambda)$, $\varphi_4(\lambda)$ einer Veränderlichen λ proportional. Natürlich giebt das nur die Raumcurven mit $p=0$; will man die algebraischen Raumcurven haben, muſs man zwei Parameter λ, μ einführen, die irgendwie durch eine algebraische Gleichung $f(\lambda,\mu)=0$ aneinander gebunden sind, und dann $\varrho x_i = \varphi_i(\lambda,\mu)$ schreiben. Das ist im Grunde derselbe Ansatz, durch den wir im vorigen Semester die Gesammtheit der Raumcurven von der Riemann'schen Theorie aus hatten entstehen laſsen: wir hatten damals x_1/x_4, x_2/x_4, x_3/x_4 drei algebraischen Functionen gleich gesetzt, welche auf irgend welcher vorgegebenen Riemann'schen Fläche existiren.

Dieser Parameterdarstellung der Raumcurven hat nun Cayley 1862, 1864 in den Comptes Rendus t. 54, 58 eine besonders anschauliche Form gegeben. Er projicirt die Raumcurve von der vierten Ecke des Coordinatentetraeders auf die gegenüberliegende Seitenfläche und nimmt nun die Verhältnisse der homogenen Coordinaten des jedesmaligen Projectionspunctes als λ, μ. Schreiben wir homogenmachend für λ, μ die Verhältnisse $\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3$, so erhalten wir für unsere Raumcurve Formeln der folgenden Art:

$$\rho x_1 = \lambda_1, \quad \rho x_2 = \lambda_2, \quad \rho x_3 = \lambda_3, \quad \rho x_4 = \frac{U_\nu(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)}{V_{\nu-1}(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)}$$

Dabei ist die zwischen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ bestehende Relation

$$f(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3) = 0$$

nichts anderes als die Gleichung der Projectionscurve. –

Wir eliminiren nun mit Cayley die $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$ und erhalten einerseits

$$f(x_1 \; x_2 \; x_3) = 0$$

andererseits

$$V_{\nu-1}(x_1, x_2, x_3) . x_4 = U_\nu(x_1 \; x_2 \; x_3).$$

Die Curve erscheint so als Schnitt des von der Coordinatenecke ausgehenden Kegels $f = 0$ mit einer Fläche, in welcher das x_4 nur einzeln auftritt, und welche darum von Cayley als Monoid bezeichnet worden ist.

Die beiden Flächen haben außer unserer Raumcurve nur noch höchstens gerade Linien gemein, die durch die Coordinatenecke hindurchlaufen, nämlich alle diejenigen geraden Linien, welche die Coordinatenecke mit solchen Punkten von $f(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = 0$ verbinden, in denen U_ν und $V_{\nu-1}$ gleichzeitig verschwinden (und für die eben darum $x_4 = \frac{U_\nu}{V_{\nu-1}}$ unbestimmt wird).

Cayley hat diese Darstellung durch „Kegel und Monoid" l. c. insbesondere benutzt, um die Aufzählung der Raumcurven fünfter Ordnung zu geben, von der wir schon oben berichteten. Später hat Ed. Weyr. auf demselben Wege die Raumcurven sechster Ordnung untersucht (Comptes Rendus t. 76, 1873); vergl. hierzu die Ergänzungen bei Nöther in Crelle 93.

Wir bemerken noch, daß vermöge dieser Darstellung der oben angeführte Satz von den 4 Flächen, welche ausreichen, um eine Raumcurve rein zu bestimmen, sofort folgt. Man beziehe die Raumcurve auf zwei verschiedene Coordinatensysteme und stelle sie in jedem derselben durch Kegel und Monoid dar. Der einzelne Kegel hat mit dem zugehörigen Monoid außer der Raumcurve auch eine Anzahl überflüssiger Geraden gemein, aber diese Geraden gehören keineswegs dem anderen Kegel bei dem anderen Monoid an, sie haben sogar mit beiden

Flächen zugleich keinen Schnittpunkt gemein, der nicht auf der Raumcurve läge. Die beiden Kegel mit den beiden Monoiden zusammen geben uns darum ein Beispiel von solchen 4 Flächen, wie wir sie suchen.

An die Aufzählung der niedersten Raumcurven, die wir jetzt verlaſsen, schlieſst sich die Betrachtung solcher höherer Curven, welche durch ihre Eigenschaften besonders zugänglich sind. Wir haben da zuvörderst:

Curven, die sich durch Nullsetzen einer Matrix darstellen laſsen.

Das einfachste Beispiel geben die Raumcurven dritter Ordnung $p_1, q_1, r_1, p_2, q_2, r_2$, ebene d.h. lineare Formen der $x_1\, x_2\, x_3\, x_4$ und man setzt die folgende Matrix gleich Null:

$$\begin{vmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix} = 0$$

d.h. sämmtliche Determinanten gleich Null, die sich aus ihr bilden laſsen:

$$p_1 q_2 - p_2 q_1 = 0, \quad p_1 r_2 - p_2 r_1 = 0$$
$$q_1 r_2 - q_2 r_2 = 0,$$

so giebt das eine Raumcurve dritter Ordnung. Die beiden ersten Gleichungen $p_1 q_2 - p_2 q_1 = 0$ und $p_1 r_2 - p_2 r_2 = 0$ geben nämlich zwei Flächen zweiten Grades, welche als solche eine Curve 4. Ordnung gemein haben, die ersichtlich die Gerade $p_1 = 0$, $p_2 = 0$ als Bestandtheil enthält und also übrigens noch aus einer Curve 3. Ordnung besteht. Nun ist die dritte Gleichung $q_1 r_2 - q_2 r_1 = 0$ eine Folge der beiden ersten, sofern man nicht gerade $p_1 = 0$, $p_2 = 0$ voraussetzt; sie giebt also eine f_2, welche wohl noch durch die Curve 3. Ordnung, aber nicht mehr durch die Gerade $p_1 = 0$, $p_2 = 0$ hindurchläuft. Analog wird jede Matrix, welche eine Colonne mehr als Zeilen enthält, sofern die Elemente Formen der $x_1\ x_2\ x_3\ x_4$ sind, eine Raumcurve vorstellen.

Man hat sich mit diesen Curven, sowie überhaupt mit den durch Matrices dargestellten Gebilden, viel beschäftigt, indem man einmal bei zahlreichen Problemstellungen zu ihnen geführt wurde, andererseits bei ihnen gewiſse Eigenschaften ohne Weiteres erkennen konnte. So sind z. B. diese Curven der projectiven Erzeugung im Sinne der neueren synthetischen Geometrie besonders zugänglich. Um hierfür wenigstens einen Ansatz zu geben, nehme man wieder die Matrix der Curve dritter Ordnung:

$$\left|\begin{matrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{matrix}\right|$$

Ihr Verschwinden kann auf doppelte Weise als Eliminationsresultat aufgefaſst werden:

1) als Bedingung dafür, daſs die drei Gleichungen

mit 2 homogenen Variablen

$$\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 = 0, \quad \lambda_1 q_1 + \lambda q_2 = 0, \quad \lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2 = 0$$

neben einander bestehen,

2) als Bedingung dafür, daſs die 2 Gleichungen mit 3 Variabelen:

$$\lambda p_1 + \mu q_1 + \nu r_1 = 0,$$
$$\lambda p_2 + \mu q_2 + \nu r_2 = 0$$

die Verhältniſse $\lambda : \mu : \nu$ nicht festlegen.

Hier bedeutet 1):

Die Punkte der Curve 3. Ordnung sind der Schnitt entsprechender Ebenen aus drei projectiv aufeinander bezogenen Ebenenbündeln

und 2):

Die Punkte der Curve 3. Ordnung erscheinen als solche Raumpunkte, durch welche von den Schnittlinien zweier entsprechender Ebenen aus projectiv aufeinander bezogenen Ebenenbündeln unendlich viele hindurchgehen.*)

Diese Schnittlinien bilden in ihrer Gesammtheit ein sogenanntes „Strahlensystem" und zwar ein „Strahlensystem erster Ordnung", da ja für einen beliebigen Raumpunkt die $\lambda : \mu : \nu$ aus den vorstehenden Gleichungen durchaus bestimmte Werthe haben werden.

---

*) Vergl. hierzu Seydewitz in Grunerts Archiv 10, 1847.

Die Curve 3. Ordnung ist die „Raumcurve" dieses Strahlensystems (welches übrigens einfach das System der zur Curve 3. Ordnung gehörigen Secanten ist!)

Wir verfolgen das hier nicht, sondern geben nur noch bezügliche Citate.

Von synthetischer Seite beschäftigt sich mit den Matrixgleichungen ausführlich *Cremona* in seiner *Theorie der Oberflächen*, womit man von neueren Arbeiten vielleicht vergleichen mag:

Schur in den Math. Annalen 18, 1881.
Reye in Crelle 107. 108 (1891)
Stahl im eben erschienenen Annalenhefte t. 40, No. 1.

Für den Analytiker stellt sich die Frage natürlich unter allgemeineren Gesichtspuncten. Ich verweise hier nur auf *Salmon's Höhere Algebra*: das Kapitel von der Ordnung von „restricted systems of equations", wo man zahlreiche weitere Literatur angegeben findet.

Eine zweite Kategorie specieller Raumcurven, die vielfach untersucht worden sind, bilden
die Curven auf Flächen zweiten und dritten Grades.
In dieser Hinsicht sind, was Flächen zweiten Grades an-

geht, die Untersuchungen von *Plücker* (Crelle 34, 1847) und *Chasles* (Comptes Rendus t. 53, 1860) bahnbrechend gewesen, für Flächen dritter Ordnung sodann die Arbeiten von *Clebsch* und *Cremona* Crelle 65 resp. 68, 1866 - 1868). Wir beziehen uns hier auf diese Arbeiten nicht nur wegen ihrer für die Curvenlehre wichtigen Resultate, sondern insbesondere auch wegen ihrer Methode. Diese Methode geht nämlich davon aus, daß man die Flächen 2ter wie 3ter Ordnung *ein-eindeutig auf die Ebene abbilden kann*, etwa so, wie man eine rationale Curve, indem man ihre Punkte durch einen Parameter λ rational darstellt, ein-eindeutig auf eine Gerade bezieht. Dabei treten freilich in der Ebene wie auf der Fläche, allgemein zu reden, eine Anzahl „Fundamentalpunkte" auf, d.h. Punkte, denen auf der Fläche, bez. Ebene ganze Curven entsprechen, in denen also die im Allgemeinen ein-eindeutige Beziehung der beiderseitigen Flächenpunkte unbestimmt wird. *Wir werden über die auf F_2 oder F_3 verlaufenden Raumcurven allen Aufschluß erhalten, indem wir die Beziehungen betrachten, welche die ebenen algebraischen Curven zu den in der Ebene gelegenen Fundamentalpunkten der Abbildung darbieten.* Uebrigens aber bietet sich diese Bemerkung. Wir besprachen im Wintersemester die ein-eindeutigen Beziehungen einer Ebene auf sich selbst (*Cre*-

mona Transformationen); jetzt haben wir ein-eindeutige Beziehungen zwischen Ebene und Fläche vor uns. Wir erkennen die Möglichkeit, daſs man die ein-eindeutigen Beziehungen zweier algebraischer Flächen aufeinander überhaupt zum Gegenstande der Untersuchungen macht.

Die hiermit bezeichnete Fragestellung erscheint als Weiterführung der Betrachtungen über ein-eindeutige Beziehung zweier Curven aufeinander, wie sie uns in der Riemann'schen Theorie immerzu beschäftigen. Natürlich braucht man dann auch nicht bei den Flächen, d.h. den zweidimensionalen Gebilden stehen zu bleiben, sondern kann die ein-eindeutigen Beziehungen beliebig ausgedehnter algebraischer Mannigfaltigkeiten in Untersuchung ziehen. Wir haben damit eine groſse Problemstellung, welche die Geometer von 1870 beginnend in der That vielfach bearbeitet haben, Allen voran *Nöther* in Bd. 2 und 8 der math. Annalen (1870, 1875).

Die ein-eindeutige Abbildung der Flächen zweiten Grades auf die Ebene geschieht durch das bekannte Verfahren, der *stereographischen Projection.* Sei O der auf der Fläche gelegene Projectionspunkt g', g'' seien die durch ihn laufenden Erzeugenden der Fläche, welche die Bildebene in den beiden Punkten O' O'' schneiden. O wird dann ein „Fundamentalpunkt der Fläche" sein, insofern ihm alle Punkte der Ebene entsprechen, in den diese von den *Tangenten* getroffen wird, die man in O an die Fläche legen kann, d.h. also alle Punkte der Geraden $O'O''$.

Andererseits sind O' und O'' „Fundamentalpunkte der Ebene", denn ihnen entsprechen auf der Fläche sämmtliche Punkte von P', bez. P''. Möge jetzt eine Raumcurve n^{ter} Ordnung auf der Fläche verlaufen. Unbeschadet der Allgemeinheit können wir jedenfalls annehmen, dass dieselbe durch O nicht hindurchgeht. Sie wird dann P' sagen wir in n' Punkten schneiden, P'' in n'', wo $n' + n'' = n$. In der Bildebene aber erscheint sie als *ebene Curve n^{ter} Ordnung, welche n' mal durch O' und n'' mal durch O'' geht.* Und nun ist das Wichtige, dass man diesen Satz ersichtlicherweise umkehren kann: *Indem wir alle ebenen Curven n^{ter} Ordnung aufzählen, die n' mal durch O', n'' mal durch O'' hindurchlaufen, wo $n' + n'' = n$, erhalten wir alle Raumcurven n^{ter} Ordnung der Fläche 2. Grades.* Da haben wir für $n = 1$ entweder $n' = 1$, $n'' = 0$ oder $n' = 0$, $n'' = 1$ zu nehmen und erhalten so die beiden Schaaren geradliniger Erzeugender der Fläche. Für $n = 2$ kommen, sofern wir Curven ausschliesen wollen, die in zwei G rade Linien zerfallen, nur $n' = 1$, $n'' = 1$ in Betracht, entsprechend den ebenen Schnitten der Fläche zweiten Grades.

Raumcurven 3^{ter} Ordnung giebt's sodann zweierlei (immer von den reducibelen Curven abgesehen), je nachdem wir

$n'=2, n''-1$ oder $n'=1, n''=2$ nehmen. Ferner 3 Arten von Raumcurven 4. Ordnung. Die mit

$n'=3, n''=1$, resp $n'=1, n''=3$ sind Curven der zweiten Species, mit $p=0$, die anderen mit

$$n'=2, n''-2$$

Curven der ersten Species, mit $p=1$. Ueberhaupt wird der volle Schnitt der Fläche zweiten Grades mit einer Fläche ν. Grades, sich als Curve der Ordnung

$$n = 2\nu$$

darstellen, für welche

$$n' = n'' = \nu \text{ ist.}$$

Indem dieser Satz umkehrbar ist, erfahren wir zugleich, wie man die anderen Curven, bei denen $n' \gtrless n''$ ist, am einfachsten zu einer vollen Schnittcurve ergänzt. Sei etwa $n' > n''$. Wir werden dann einfach $(n'-n'')$ durch O'' laufende Gerade unserer ebenen C_n hinzufügen, und erhalten so eine $C_{2n'}$, welche das Bild des vollen Schnittes der Fläche 2ten Grades mit einer zutretenden Fläche der Ordnung n' ist. Notiren wir vielleicht noch folgende Sätze, die man unmittelbar verificirt.

Das Geschlecht p der Curve n^{ter} Ordnung wird am größten, wenn man n' dem n'' möglichst gleich nimmt. Ist n gerade, so setze man $n'=n''$ und hat dann $p=\left(\frac{n-2}{2}\right)^2$, ist n ungerade, so $n'=n''=1$ und hat $p=\frac{n-1 \cdot n-3}{4}$

Zwei Curven $(n'; n'')$ und $(m'; m'')$ schneiden sich auf der Fläche 2. Grades in $m'n'' + n'm''$ Puncten. -

Alles dies ist in Uebereinstimmung mit dem, was wir von früher her über die Curven niederster Ordnung auf der Fläche 2^{ten} Grades wiſsen, und zeigt, wie man vermöge der ebenen Abbildung geradezu eine volle Geometrie der auf der Fläche verlaufenden algebraischen Curven entwerfen kann. —

Nun zur Abbildung der Flächen dritter Ordnung. Ich werde mich hier mit der Herstellung dieser Abbildung nicht weiter aufhalten, sondern nur kurz das Resultat beschreiben. Daſselbe geht dahin, daſs in der Ebene sechs Fundamentalpunkte auftreten:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6,$$

sechs windschiefen Geraden der Fläche dritter Ordnung entsprechend, und daſs die ebenen Schnitte der Fläche in der Bildebene als Curven dritter Ordnung erscheinen, welche durch die Fundamentalpunkte je einfach durchlaufen.

Wird jetzt in der Ebene eine Curve n^{ter} Ordnung gegeben, welche α_i mal durch den i^{ten} Fundamentalpunkt geht, so giebt das auf der Fläche ersichtlich eine Curve der Ordnung $3n - \Sigma\alpha_i$. Wir setzen diese Zahl der Reihe nach $= 0, 1, 2, \ldots\ldots$ und suchen die ganzzahligen Lösungen der solcherweise entstehenden diophantischen

Gleichung jedesmal zu erschöpfen. Wir erhalten so beispielsweise:

$3n - \Sigma^i \alpha_i$ kann nicht auf Null herabsinken, daher liegen auf der Fläche dritter Ordnung bei der Abbildung, die wir untersuchen, keine Fundamentalpunkte.

Auſser den 6 Geraden, die sich in die Fundamentalpunkte selbst abbilden, enthält die Fläche dritter Ordnung deren noch 21, entsprechend den 15 Verbindungsgeraden, welche die Fundamentalpunkte 1, 2, 3, 4, 5, 6 in der Ebene aufweisen, und den 6 Kegelschnitten, welche man durch je 5 der Fundamentalpunkte in der Ebene construiren kann.

Raumcurven dritter Ordnung giebt es auf der Fläche eine groſse Zahl, insbesondere werden die geraden Linien der Ebene, welche durch keinen Fundamentalpunkt laufen, wie andererseits diejenigen ebenen Curven fünfter Ordnung, welche jeden Fundamentalpunkt zum Doppelpunkt haben, Raumcurven 3. Ordnung der Fläche vorstellen.

Man nehme ferner, daſs der volle Schnitt der F_3 mit einer zutretenden F_ν sich als Curve 3νter Ordnung darstellt, welche ν. mal durch jeden Fundamentalpunkt geht, und daſs dieser Satz wieder umkehrbar ist. So werden wir alle Fragen, die sich auf die Schnitte der

F_3 mit anderen Flächen beziehen, mit Leichtigkeit beantworten können. Man zeichne z. B. in der Ebene:

a) Den Kegelschnitt, der durch die Fundamentalpunkte 1, 2, 3, 4, 5, 6, läuft.

b) eine C_5, welche jeden Fundamentalpunkt zum Doppelpunkte hat,

c) einen Kegelschnitt, der durch 6 hindurchläuft.

So giebt das, auf die F_3 übertragen:

a) eine gerade Linie

b) eine zu dieser Geraden windschiefe Raumcurve dritter Ordnung,

c) eine Raumcurve fünfter Ordnung, vom Geschlechte 0.

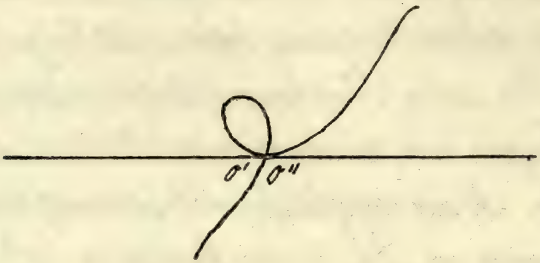
Aber a), b), c) zusammen geben in der Ebene eine Curve neunter Ordnung, welche durch jeden Fundamentalpunkt dreimal hindurchgeht. Daher geben a), b), c), zusammen im Raume den vollen Schnitt der F_3 mit einer zutretenden Fläche dritter Ordnung. *Wir haben so die Existenz jener Raumcurven fünfter Ordnung, nachgewiesen, die wir auf p. 10 an vierter Stelle angeführt hatten.*—

Nun kann man ferner unternehmen, *alle* Curven fünfter, sechster ... Ordnung der F_3 aufzuzählen. Ausser den bereits genannten Abhandlungen von Clebsch und Cremona wolle man in dieser Hinsicht *Cremona's Theorie der Oberflächen*, sowie die Arbeiten von *Sturm* in Bd. 21 der Math. Annalen (1883) vergleichen. (Ueber die Curven auf der allgemeinen Fläche dritter Ordnung). –

Bemerken wir schlieſslich noch, daſs die hiermit geschilderten Verhältniſse sich selbstverständlich modificiren, wenn die Fläche dritter Ordnung besondere Singularitäten erhalten sollte. Die sechs Fundamentalpunkte nehmen dann ev. besondere Lagen an, rücken zum Theil einander unendlich nahe, etc. etc. Man vergleiche die hierauf bezügliche Arbeit von *Dickmann* in Bd. 4 der Annalen (1871), an der ich einen gewiſsen Antheil habe, insofern D. dieselbe wesentlich unter meiner Leitung ausgeführt hat.

Uebrigens kann die Frage nach der Gestaltung [Di. 3.5.1892] der Abbildung in besonderen Fällen natürlich auch bei den Flächen 2. Grades gestellt werden. Wir haben da als einzige Ausartung den Uebergang der Fläche in einen *Kegel* in Betracht zu ziehen. Wir erhalten darauf bei der stereographischen Projection *zwei unendlich nahe Fundamentalpunkte O', O''*. In der That läuft ja jetzt durch O nur eine einzige Erzeugende $P' = P''$. Eine Curve, welche $P' = P''$ irgendwie durchsetzt, wird sich in der Ebene so abbilden, daſs sie durch $O' = O''$ *in bestimmter Richtung* hindurchläuft. Nur wenn die Curve durch die Spitze des Kegels hindurchläuft, wird diese Richtung unbestimmt werden. Infolge deſsen stellt sich beispielsweise eine auf dem Kegel verlaufende

Raumcurve dritter Ordnung (welche einmal durch die Kegelspitze geht und übrigens P' = P'' noch einmal schneidet) in der Abbildung folgendermaassen dar:



So viel über die Aufzählung der niedersten Raumcurven in der Periode 1850 - 1870. Wir handelen nun

ad 2) *von den Eigenschaften der Raumcurven,* die man damals insbesondere in Betracht gezogen hat. Hier ist in erster Linie *Cayley's Uebertragung der Plückerschen Formeln auf die Geometrie der Raumcurven,* zu nennen, die wir schon oben citirten (Liouville's Journal X, 1846). Vom Standpunkte der projectiven Geometrie aus wird man nicht einseitig die Punkte der *Raumcurve* betrachten, sondern immer gleichzeitig die *Tangenten* derselben (welche die zur Curve gehörige Developpable bilden) und die *Osculationsebenen* derselben (welche die Developpable umhüllen): der Gleichförmigkeit halber mögen wir kurz von den *Punkten, Linien und Ebenen* des

„Systems" sprechen. Die Ordnung der Curve, die wir jetzt m nennen, erscheint als die Zahl der Punkte, die in einer beliebigen Ebene des Raumes liegen; dem tritt nun dualistisch die *Claſse* n entgegen. Daneben werden wir als *Rang r* die Zahl der Linien des Systems bezeichnen, welche eine beliebig vorgegebene Gerade schneiden. Von Singularitäten, welche die Curve in ihrem Verlaufe darbieten kann, zieht Cayley nur die *stationären Punkte* und *stationären Ebenen* in Betracht, deren Anzahlen er bez. mit β und α bezeichnet. Ein stationärer Punkt erscheint dem Auge als eine Spitze der Curve; eine stationäre Ebene wird am besten als eine solche Osculationsebene der Curve erklärt, welche nicht 3, sondern 4 aufeinanderfolgende Punkte mit der Curve gemein hat. Daneben betrachtet dann Cayley noch folgende Zahlen:

Die Zahl h der „Linien durch 2 Punkte", welche durch einen beliebigen Raumpunkt gehen (also die Zahl der Secanten der Curve, die durch den Raumpunkt gehen).

die Zahl y der „Ebenen durch 2 Linien", welche durch beliebigen Raumpunkt gehen, d.h. der Ebenen, welche die Curve zweimal berühren.

und dualistisch dazu:

die Zahl g der „Linien in 2 Ebenen", welche in beliebiger Ebene liegen, die Zahl x der „Punkte in 2 Linien", welche in beliebiger Ebene liegen.

Es zeigt sich, daſs diese neun Zahlen

$$m, n, \underline{r}, \alpha, \beta, g, h, x, y$$

zusammen gerade ausreichen, um die Charaktere der beiden ternären eindimensionalen Gebilde, welche man mit unserem Systeme in unmittelbare Beziehung setzen kann, festzulegen, nämlich des Kegels, den man von einem beliebigen Raumpunkte aus an die Curve legen kann, und der Durchschnittscurve, welche eine beliebige Ebene des Raumes mit der zugehörigen Developpablen gemein hat.

Man findet nämlich beim Kegel:

Ordnung	Claſse	Doppelkante	Doppeltangente	Rückkehrkanten
$\mu = m$	$\nu - \underline{r}$	$\delta = h$	$\tau = y$	$\iota = \beta$

Wendeebenen

$$\kappa = n.$$

und bei der ebenen Curve

Ordnung	Claſse	Doppelpunkte	Doppeltangente	Rückkehrpunkte
$\mu = \underline{r}$	$\nu = n$	$\delta = x$	$\tau = g$	$\iota = m$

Wendetangente

$$\kappa = \alpha$$

wie wir hier ins Einzelne nicht weiter nachweisen.

Und nun zieht Cayley die Plückerschen Formeln für jede dieser beiden Reihen von 6 Gröſsen heran:

$\nu = \mu\cdot\mu-1 - 2\delta - 3\tau, \qquad \mu = \nu\cdot\nu-1 - 2\tau - 3k,$

$k = 3\mu\cdot\mu-2 - 6\delta - 8\tau, \qquad i = 3\nu\cdot\nu-2 - 6\tau - 8k.$

Indem dieselben, wie wir wiſsen, jedesmal nur 3 unabhängige Relationen vorstellen, hat er im Ganzen für seine 9 Zahlen *sechs Relationen, mit deren Hülfe er sechs derselben aus den übrigen 3 berechnen kann*.

So haben wir beispielsweise für die Raumcurve 3. Ordnung:

$$m = 3,\ \beta = 0,\ h = 1.$$

In Folge deſsen wird:

$$r = 4,\ n = 3,\ y = 0,\ x = 0,\ \alpha = 0,\ g = 1.$$

Die Curve ist, was diese Zahlen angeht, sich selbst dualistisch, wie dies aus anderweiten Gründen nothwendig ist.

Ferner für die Raumcurve 4. Ordnung erster Species:

$$m = 4,\ \beta = 0,\ h = 2,$$

und also:

$$r = 8,\ n = 12,\ y = 8,\ x = 16,\ \alpha = 16,\ g = 38.$$ —

Dieser ganze Ansatz ist natürlich nur ein Anfang. *Cayley* selbst hat das beste dazu gethan, um auch anderweite Singularitäten der Raumcurve mit in Betracht zu ziehen, bez. andere für die Raumcurve wesentliche Anzahlen zu bestimmen. Da wir auf keine Einzelheiten eingehen können, beziehen wir uns hier gleich auf die abschliessende Abhandlung, welche *Zeuthen* über die hier in Betracht kommenden Fragen 1869 in Bd. III der Serie 2 der Annali di Mathematica veröffentlicht hat (Sur les singularités ordinaires d'une courbe gauche et d'une surface développable). Zeuthen stattet seine Raumcurve nicht nur mit α stationären Ebenen und β stationären Punkten aus, sondern auch mit G wirklichen Doppelebenen (zweimal osculirenden Ebenen), H wirklichen (nicht blos scheinbaren) Doppelpunkten und v Wendetangenten (Tangenten, die 3 aufeinander folgende Punkte mit der Curve gemein haben). Er betrachtet sodann nicht nur den Kegel, der von einem beliebigen Raumpunkte ausläuft, sondern den Kegel von einem Punkte der Developpablen aus, von einem Punkte der Raumcurve selbst aus etc, etc. Analog nicht nur die allgemeinen ebenen Schnitte, sondern die Schnitte mit einer Tangentenebene, der Curve, etc, etc. Allemal können dann wieder die Plückerschen Formeln herangezogen werden. Aber dies ist nur die Vorbereitung. Der Haupttheil der Zeuthen'schen Arbeit bezieht sich auf die Bestimmung gewisser höherer Anzahlen, wie der dreifachen Tangentenebenen der Curve, der Ordnung der Fläche, die von ihren dreifachen Secanten erzeugt wird, der Zahl ihrer einfachen Secanten. Hierbei müssen wir etwas verweilen. Wir greifen dabei zunächst noch einmal auf den Beweis der Plüker'schen Formeln zurück.

Sei μ die Ordnung, ν die Claſse der ebenen [Fr. 6.5.92] Curve, δ die Zahl der Doppelpunkte, τ die der Doppeltangenten, i die Zahl der Spitzen, k diejenige der Wendetangenten. Wir haben dann vor allen Dingen zu zeigen, daſs

$$\begin{cases} \nu = \mu \cdot \mu - 1 - 2\delta - 3i, \\ k = 3\mu \cdot \mu - 2 - 6\delta - 8i, \end{cases}$$

und dieser Nachweis reducirt sich wieder darauf, für die Curve ohne Doppel- und Rückkehrpunkte $\nu = \mu . \mu - 1$ und $k = 3\mu . \mu - 2$ zu finden und dann die Reduction anzubringen, welche diese Zahlen durch die einzelnen Doppel- und Rückkehrpunkte erleiden. Der erste Theil dieses Nachweises, der uns hier hauptsächlich beschäftigen soll, wird gewöhnlich analytisch erbracht. Man stützt sich darauf, daſs die Berührungspunkte der Tangenten, welche von irgend einem Punkte O aus an die Curve $f = 0$ laufen, die Durchschnittspunkte von $f = 0$ mit der ersten Polare von O, d.h. Wendepunkte auf $f = 0$ durch den Schnitt mit der Heſse'schen Curve von f bestimmt werden. Eben das Studium der Polaren, wie der Heſse'schen Curve in den singulären Punkten von $f = 0$ giebt sodann die Reductionen, welche an den Zahlen ν und k beim Auftreten singulärer Punkte anzubringen sind.

Die so geschilderte Methode ist nun aber deſshalb auf die Fragen, die wir bei den Raumcurven stellen, nicht übertragbar, weil wir über die analytische Darstellung der einzelnen, möglicherweise vorgelegten Raumcurve $(m, n, r, \alpha, \beta, \dots)$ von vorneherein nichts Allgemeines wiſsen. Da werden wir nur in ganz abstracter Form das Problem der vielfachen Secanten etc. analytisch formuliren können, und es ist keine Rede davon, daſs wir solch explicite Gleichungen dabei sollten erhalten können, wie vorhin die Gleichung der Polaren oder der Heſse'schen Curve. Wir verlangen darum *eine Abzählungsmethode, welche von der expliciten Aufstellung analytischer Gleichungen unabhängig ist.* Und das ist nun das Verdienst von *Chasles* (an den Zeuthen in der genannten Abhandlung anknüpft) in der Anwendung seines *Correspondenzprincip's* eine solche Methode entwickelt zu haben*).

Das Princip als solches ist, wie wir schon in der Wintervorlesung ausführten, so einfach als möglich.

Man habe eine Gleichung mit 2 Variabelen $f(x/y)=0$, oder, wie wir lieber homogen machend schreiben: $f(x_1, x_2 / y_1, y_2) = 0$, d.h. eine Gleichung zwischen dem Elemente (x) und dem Elemente (y) irgend welcher eindimensionalen rationalen Mannigfaltigkeit, in dem

---

*) In den 60er Jahren.

x vom α^{ten}, in dem y vom β^{ten} Grade, also eine „Correspondenz α, β" auf der genannten Mannigfaltigkeit. Setzen wir jetzt $y = x$, d.h. $y_1/y_2 = x_1/x_2$, so giebt das für x_1/x_2 eine Gleichung vom Grade $\alpha + \beta$, die $\alpha+\beta$ Wurzeln hat, sofern sie nicht identisch verschwindet. Daher: *Die Correspondenz hat $(\alpha + \beta)$ Coincidenzen, sofern sie deren nicht unendlich viele hat.* Vorausgesetzt ist dabei, daſs jede Coincidenz mit der richtigen „Multiplicität" gezählt wird. —

Das hiermit aufgestellte „Princip" als solches ist, wie wir wiederholt sagten, etwas durchaus Selbstverständliches. der Schwerpunkt ist darauf zu legen, daſs man lernt, das Princip bei geometrischen Aufgaben von steigender Complication anzuwenden.

Wir entwickeln in dieser Hinsicht zunächst einen *Beweis der Formel $\nu = \mu\,(\mu-1)$ für Curven ohne Doppel- und Rückkehrpunkte.* Es seien O, P zwei beliebige Punkte der Ebene. Durch P. ziehen wir einen ersten Strahl (x), der die vorgelegte Curve in μ Punkten schneidet. Indem wir jeden dieser Schnittpunkte mit O verbinden, haben wir μ von O auslaufende Hülfsstrahlen, deren jeder die Curve auſser in dem einen auf (x) gelegenen Punkte noch in $\mu - 1$ Punkten durchsetzt. Die so entstehenden $\mu \cdot (\mu-1)$ Punkte verbinden wir nun wieder mit P durch Strahlen (y). Es „correspondiren" dann im Strahlenbüschel P jedem (x) $\mu \cdot \mu - 1$ Strahlen (y), und auch umgekehrt jedem (y), wie man sofort bei Rückwärtsdurchlaufung der Construction sieht, $\mu \cdot \mu - 1$ Strahlen (x); man hat eine Gleichung:

$$F\left(\overset{\mu\cdot\mu-1}{x}, \overset{\mu\cdot\mu-1}{y}\right) = 0$$

zwischen den „Parametern" x und y, durch welche man die Strahlen (x), (y) innerhalb des von P auslaufenden Büschels festlegen kann. Das giebt dann

$$2\mu(\mu-1)$$

„Coïncidenzen", und es bleibt nun zu untersuchen, wie so bei diesem Ansatze die Coïncidenzen geometrisch herauskommen können. Da ist erstlich ersichtlich, daſs jedesmal eine Coïncidenz von (x) mit (y) entsteht, wenn einer der μ von O auslaufenden Hülfsstrahlen die vorgelegte Curve berührt. Ist ν die Claſse unserer Curve, so geschieht dies genau ν mal. Andererseits ist klar, daſs die Verbindungsgerade OP eine ganze Zahl von Coïncidenzen (x), (y) in sich vereinigt. Man kann sich leicht plausibel machen, daſs nicht weniger als $\mu(\mu-1)$ Coïncidenzen in diesen einen Strahl $\overline{OP}$ hineinfallen. Denn jeder der μ Schnittpunkte von $\overline{OP}$ mit der Curve liefert mit P verbunden einen Strahl (x), der mit allen den $\mu - 1$ Strahlen (y) zusammenfällt, die entstehen, wenn man den Punkt P mit irgend welchem der $(\mu-1)$ anderen Schnittpunkte verbindet. Giebt man die Richtigkeit der so gefundenen Multiplicität zu, so hat man

$$r+\mu(\mu-1)=2\,\mu(\mu-1)$$

als Gesammtzahl der Coïncidenzen und damit

$$r=\mu(\mu-1),$$

was zu beweisen war. –

Man erkennt hier gleich die Schwierigkeit, mit welcher die Anwendung des Princips zu thun hat. *Die Schwierigkeit ist immer die, die Multiplicität der einzelnen geometrisch hervortretenden Coïncidenzen richtig zu zählen*. Die wahre Methode hierfür ist natürlich die, daſs man die Gleichung $F(x/y)=0$ in der Nähe der in Betracht kommenden Coïncidenz in eine Potenzreihe entwickelt. Statt deſsen wird in einfacheren Fällen eine graphische Construction der Gleichung $F(x/y)=0$ ausreichen können, wie Zeuthen l.c. ausführt, indem er auf einen früheren Aufsatz in Bd. VI der 2^{ten} Serie der „Nouvelles Annales" verweist. Thatsächlich sind die Geometer bei den zahlreichen Anwendungen, die sie von dem Correspondenzprincip gemacht haben, nur selten auf eine derartige genaue Discussion eingegangen. Sie haben sich vielmehr bei Abschätzung der Multiplicitäten zumeist nur von Rausibilitätsgründen leiten laſsen, vermöge deren sie in der groſsen Mehrzahl der Fälle ja wahrscheinlich das Richtige getroffen haben, aber den Anforderungen an strenge Beweisführung, die man in der Mathematik doch immer aufrecht erhalten muſs, nicht genügten.

In der Freude, immer neue Resultate zu finden, haben sie sich um Zuverläſsigkeit der Resultate vielleicht zu wenig gesorgt. Da ist dann der Rückschlag unvermeidlich. Indem dabei das Intereſse für Kritik einseitig in den Vordergrund tritt, ist Gefahr, daſs alle die schönen und ideenreichen Combinationen, welche die Geometer ersonnen haben, unbillig zurückgeschoben werden, – daſs die Wiſsenschaft ein Gebiet, welches sie freilich zuerst in vorläufiger Form erobert hatte, zum guten Theile wieder aufgiebt. Ich muſs übrigens zufügen, daſs die Geometer ihre aus dem Correspondenzprincip abgeleiteten zunächst nur „plausiblen" Abzählungen vielfach dadurch controlirt haben, daſs sie dieselbe Zahl durch verschiedenartige Anwendung des Correspondenzprincips bestimmten. Alle diese Methoden erinnern an das inductive Verfahren der Naturwiſsenschaft.

Nehmen wir als zweites Beispiel für die Anwendung des Princips noch die *Abzählung der Wendepunkte* $k=3\mu(\mu-2)$.

Wieder wählen wir einen Punkt P der Ebene und legen durch ihn einen Strahl (x). Derselbe schneidet die vorgelegte Curve in μ Punkten, in deren jedem wir die Tangente construiren, die ihrerseits die Curve in $(\mu-2)$ neuen Punkten trifft. Das sind im Ganzen $\mu(\mu-2)$ neue Punkte, welche mit P ebenso viele Strahlen (y) liefern. –

Beginnen wir mit einem solchen Strahl (y), so wird die Construction rückwärts genommen die sein, dass wir von jedem der μ Schnittpunkte, welche (y) mit der Curve gemein hat, die $\nu-2$ Tangenten legen, welche durch ihn hindurchlaufen, ohne in ihm selbst die Curve zu berühren, und dass wir dann die $\mu(\nu-2)$ Berührungspunkte der solcherweise gefundenen Tangenten mit P durch Strahlen (x) verbinden. Wir haben daher eine Correspondenz:

$$F\left(\overset{\mu(\nu-2)}{x},\ \overset{\mu(\mu-2)}{y}\right)=0$$

oder, wenn wir für ν seinen Werth $\mu(\mu-1)$ einsetzen:

$$F\left(\overset{\mu(\mu+1)(\mu-2)}{x}\ \Big/\ \overset{\mu(\mu-2)}{y}\right)=0$$

Die Correspondenz liefert $\mu(\mu-2)(\mu+2)$ Coincidenzen, und es ist nun die Frage, was diese geometrisch zu bedeuten haben. Wir werden erstlich, und das ist jetzt das Wichtige, einer jeden der κ Wendungen der Curve entsprechend eine Coïncidenz haben. Wir werden zweitens eine jede der $\nu = \mu(\mu-1)$ von P an die Curve gehenden Tangenten als eine vielfache Coïncidenz zu zählen haben. Die nähere Betrachtung zeigt (und das ist nun wieder der schwierige Punkt, bei dem wir uns nicht weiter aufhalten), das diese der einzelnen Tangente beizulegende Multiplicität $(\mu-2)$ ist. Daher kommt:

$$k + \mu(\mu-1)(\mu-2) = \mu(\mu-2)(\mu+1),$$

oder

$$k = 3\mu(\mu-2),$$

was richtig ist. –

Endlich wird dann an den hiermit gewonnenen Formeln

$$\nu = \mu(\mu-1), \quad k = 3\mu(\mu-2)$$

für den Fall, daſs Doppel- und Rückkehrpunkte vorhanden sein sollten, die entsprechende Reduction anzubringen sein. Das ist dann abermals eine Sache, welche streng genommen nur durch Reihenentwickelung in der Nähe der einzelnen in Betracht kommenden Stelle zu erledigen ist. –

Diese Beispiele werden genügen um die *Methode des Correspondenzprincips* nach ihrer Tragweite beurtheilen zu lassen. *Sie leistet erstlich dies, daſs sie die in Betracht kommenden algebraischen Fragen* sämmtlich auf doppelt-binäre Gleichungen:

$$F(x_1, x_2 \,|\, y_1, y_2) = 0$$

reducirt; sie erspart uns sodann, diese Gleichungen in abgeschloſsener Form hinzuschreiben, und verlangt nur, daſs man sie in der Nähe einzelner Stellen durch geeignete Reihenentwickelungen untersuche.

Vermöge der so geschilderten Methode be- [Mo. 8.5 92] stimmt nun Zeuthen in der genannten Abhandlung eine groſse Zahl von Vorkommniſsen, die man bei einer Raumcurve in Betracht ziehen mag. Seine Erläuterungen sind dabei so ausführlich und klar, daſs ich bei den Einzelheiten hier nicht weiter zu verweilen brauche, sondern mich begnügen kann, einige Anzahlen anzugeben. Zeuthen findet: (für eine Curve ohne stationäre Punkte. d.h. mit $\beta = 0$!)

die Zahl der Geraden $d(d_1, d_2, 1, 1,)$ d.h. der Geraden, welche 2 feste Gerade d_1 d_2 schneiden und die Raumcurve zweimal treffen:

$$= h + \tfrac{1}{2}\, m(m-1),$$

die Zahlen der Geraden $d(d_1, 1, 1, 1,)$, welche d_1 einmal und die Raumcurve dreimal (in 3 getrennten Punkten) treffen, also die Ordnung der von den dreifachen Secanten der Raumcurve gebildeten Linienfläche;

$$= (m-2)\left(h - \frac{m \cdot m-1}{6}\right),$$

die Zahl der einfachen Secanten $d(1, 1, 1, 1,)$

$$= \frac{1}{24}\left(12h(h-4m+11) - m(m-2)(m-3)(m-13)\right); -$$

dann ferner beispielsweise die Zahl der dreifachen Tangentenebenen der Curve

$$= \frac{1}{3}\left(-\underline{r}^3 + 13\,\underline{r}^2 + 8m - 42\,\underline{r} + y(3\,\underline{r} - 26)\right) \ldots\ldots\ldots \text{ꝛc. ꝛc.} -$$

Wir haben da nur Zweierlei hinzuzufügen:

1) Ein groſser Theil dieser Zahlen ist bereits vorher von Cayley aufgestellt worden in der wichtigen Abhandlung: On skew Surfaces, otherwise Scrolls, Phil. Transactions t. 153. 1863. Nur daſs Cayley dort mit der unbewiesenen Voraussetzung beginnt, daſs die gesuchten Zahlen rational und ganz von m und h abhängen müſsen, und dann die Form der bezüglichen rationalen ganzen Functionen durch das Studium specieller Fälle bestimmt. Die genannte Voraussetzung ist zunächst nicht anders zu stützen, als daſs sie sich in den niederen Fällen bewährt hat. Ihre mathematische Richtigkeit folgt erst aus der Heranziehung des Correspondenzprincips bei Zeuthen.

2) Es giebt besondere Fälle, in denen einzelne der bestimmten Zahlen unendlich werden, beispielsweise die Zahl der vielfachen Secanten, im Falle man die Raumcurve als Schnitt einer Linienfläche mit einer Fläche μ^{ter} Ordnung behandelt, $\mu \geqq 3$ genommen. Welche Möglichkeiten liegen in dieser Hinsicht vor? Werden nicht vielleicht einige der Zahlen, die man als endliche Zahlen abzählt, immer un-

endlich? – (Was ja durch das Correspondenzprincip als solches nicht ausgeschlossen ist). – Und wenn die Lösungen in unendlicher Zahl auftreten, kann es daneben nicht noch isolirte Lösungen geben, und wie groſs ist gegebenen falls deren Zahl? (z. B. isolirte Quadrisecanten der auf der Linienfläche gelegenen Raumcurven etc. etc.) –.

Eben diese Frage nach den möglichen Ausartungen der im allgemeinen Falle erledigten Abzählungen wird später für uns besonders wichtig werden. –

Uebrigens aber werden wir, da wir doch einmal von bestimmten Abzählungsaufgaben bei Curven handeln, hinzufügend erläutern, wie sich der Ansatz vereinfacht, sofern wir statt des *Chasles'*schen Correspondenzprincips das ebenfalls bereits in der Wintervorlesung genannte *Cayley-Brill'sche Correspondenzprincip* benutzen wollen (cf. Band I der Autographie).

Wir erklären zuerst das Princip genauer. Auf einer ebenen Curve $f=0$ habe man zwischen zwei Punkten x_1, x_2, x_3 $(=x)$ und y_1, y_2, y_3 $(=y)$ eine (α, β) Correspondenz, und diese sei in der Weise dargestellt, daſs eine biternäre Gleichung

$$F(x|y)=0$$

bei festgehaltenem x aus $f=0$ die Punkte y, bei festgehaltenem y aus $f=0$ die Punkte x ausschneidet. Und zwar soll das in der Weise geschehen, daſs die Curve $F(x|y)=0$, wir denken jetzt die x als gegeben, die y als laufende Coordinaten, also die „Curve der y" – die Grundcurve $f=0$ nicht nur in den Punkten y, sondern auch in dem g fach zählenden Punkt x selbst schneidet. Man überzeugt sich dann, daſs die „Curve der x", – die bei festgehaltenem y durch $F(x|y)=0$ dargestellt wird –, aus der Grundcurve ebenfalls nicht nur die Punkte x ausschneidet, die dem gegebenen y entsprechen, sondern auch den Punkt y und zwar genau g fach zählend. Die so in doppelter Weise definirte Zahl g nennen wir die „Werthigkeit der Correspondenz".

Dies vorausgesetzt soll nach Cayley - Brill die Zahl der auf $f=0$ stattfindenden Coïncidenzen

$$\alpha+\beta+2gp$$

betragen, unter p das Geschlecht der Grundcurve verstanden!

[Do. 12. 5. 92] Zu erläutern dieses Princip, werden wir zunächst bei der Curve μ^{ter} Ordnung ohne singuläre Punkte erneut die beiden Plücker'schen Formeln herstellen:

$$\nu=\mu(\mu-1), \qquad k=3\mu(\mu-2).$$

Das geht hier äuſserst einfach. Sei $f=0$ die gegebene Curve. Wir nehmen natürlich an, daſs der zugehörige Werth von $p=\frac{(\mu-1)(\mu-2)}{2}$ bekannt sei. Sei dann O irgend ein Punkt der Ebene. Wir legen durch einen beliebigen Punkt x

von $f=0$ die Verbindungsgerade mit O, welche $(\mu-1)$ weitere Punkte aus $f=0$ ausschneidet, die wir y nennen.

Dieselbe Construction führt offenbar zu $(\mu-1)$ Punkten x zurück. Wir haben also eine $(\mu-1, \mu-1)$ Correspondenz, bei welcher der Verbindungsstrahl $\overline{x,y}$ die Rolle jener Gleichung $F(x/y)=0$ übernimmt, und bei der also $g=1$ ist.

Dementsprechend giebt es

$$(\mu-1)+(\mu-1)+2\,\frac{\mu-1.\mu-2}{2}$$

$=\mu(\mu-1)$ Coïncidenzen, d.h. Tangenten von O, was direct die Formel für ν ist. Andererseits construiren wir uns eine Correspondenz, indem wir jedem Punkte x von $f=0$ diejenigen $\mu-2$ Punkte zuordnen, in denen seine Tangente der Curve $f=0$ weiterhin begegnet $(\gamma=2)$. Einem gegebenen Punkte y entsprechen dabei $\nu-2=\mu(\mu-1)-2$ Punkte x: diejenigen von y verschiedenen Curvenpunkte, an welche man von y aus Tangenten legen kann. Sie erscheinen als Schnitt von $f=0$ mit der ersten Polare des Punktes y, sofern wir von den 2 Schnittpunkten absehen, welche die beiden Curven im Punkte y selbst gemein haben. Dieser letztere Umstand giebt uns erneut $\gamma=2$. Das Cayley-Brill'sche Princip giebt jetzt $(\mu-2)$. $+(\nu-2)+(\mu-1)(\mu-2)-2$ Coïncidenzen, d.h., da $\nu-2=(\mu+1).(\mu-2)$, $3\mu(\mu-2)$ Coïncidenzen, und das ist in der That die richtige Zahl der Wendepunkte. –

Bei der grossen Leichtigkeit, mit der wir so die Formeln für ν und κ bei der singularitätenfreien Curve $f=0$ gewonnen haben, interessirt es, dieselbe Abzählung bei der mit δ Doppelpunkten und i Spitzen ausgestatteten Curve zu wiederholen. Da ändert sich dann Nichts, als dass wir für p den Werth $\frac{n-1 \cdot n-2}{2} - \delta - i$ einzusetzen haben. Folgeweise wird z. B. die Zahl der von O aus an die Curve laufenden Tangenten: $n(n-1) - 2\delta - 2$, während die richtige Formel für ν, wie wir wissen, $n(n-1) - 2\delta - 3$ ist. Woher dieser Unterschied? Er kommt darauf hinaus, dass bei unserer Correspondenz auf $f=0$ die i Spitzen der Curve je einfach als Coïncidenzen auftreten, dass also die Verbindungsgeraden von O mit den i Spitzen als Tangenten von O aus je einfach mitgezählt werden, entgegen der Auffassung, von der man bei der gewöhnlichen Abzählung von ν ausgeht.

Man kann manches für diese abweichende Auffassung sagen, wie denn bei Projection der Curve von O aus auf eine gerade Linie die Spitzen in der That Verzweigungspunkte liefern. Aber wichtiger für uns hier ist, dass bei der Abzählung des ν hier überhaupt eine specielle Discussion der in die Spitzen der Curve fallenden Coïncidenzen nöthig ist. *Auch bei der Anwendung des Cayley-Brill'schen Princips ist ein bloss mechanisches Zählen ausgeschlossen; man muss immer hinterher sich davon Rechenschaft geben, was eigentlich man abgezählt hat.*

Wir erläutern hier anschlieſsend gleich noch ein drittes Princip, durch welches man gleichfalls die hier in Untersuchung stehenden Abzählungen machen kann: *das Princip der speciellen Lage*. Daſselbe ist noch einfacher und sozusagen fundamentaler, als die beiden Correspondenzprincipe, insofern man diese selbst, wie auch das Bezout'sche Theorem, das wir zwischendurch immer benutzten, überhaupt *alle* Abzählungen, die man betrachten mag, auf dieses eine Princip gründen kann. Auf der anderen Seite wird man bei Anwendung des Princips erhöhte Sorgfalt darauf zu wenden haben, daſs alle Bedingungen der Anwendbarkeit richtig eingehalten worden sind.

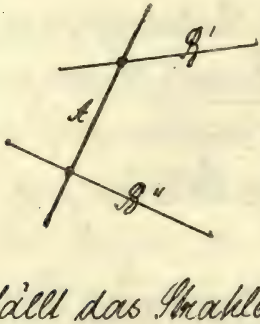
Hier zunächst einige Beispiele, die den Sinn des Princips verständlich machen:

1.) *Zwei Curven der Ordnungen μ und μ' schneiden sich in $\mu\mu'$ Punkten (Bezout's Theorem).* Denn man laſse die eine Curve in μ, die andere in μ' gerade Linien zerfallen, so hat man ohne Weiteres $\mu\mu'$ Schnittpunkte vor Augen.

2.) *Die Claſse der allgemeinen Curve μ^{ter} Ordnung ist $\mu(\mu-1)$.* Zum Beweise laſse man die Curve wieder in μ gerade Linien ausarten. Alle von einem Punkte O aus an die Curve laufenden Tangenten reduciren sich dann auf die $\frac{u \cdot u-1}{2}$ geraden Linien, welche O mit den Durchschnittspunkten irgend zweier der u Geraden verbinden. Nun will jede dieser von O auslaufenden Verbindungsgeraden als Tangente doppelt gezählt sein, ergo. –

3. *Ein höheres Beispiel*. Wie viele gemeinsame Secanten besitzen zwei Raumcurven dritter Ordnung?

Wir bemerken vorab, daſs das Strahlensystem der Secanten einer Raumcurve dritter Ordnung ein System (1,3) ist, d.h. die Ordnung 1 und die Claſse 3 besitzt (durch einen beliebigen Raumpunkt geht immer *ein* Strahl des Systems, in einer beliebigen Ebene liegen *drei*). Nun kann die Curve 3. Ordnung ausarten in drei gerade Linien, von denen eine (A), die beiden anderen (B', B'') schneidet:



Dabei zerfällt das Strahlensystem (1,3) der Secanten in folgende Bestandtheile:

in das System (1,1) der gemeinsamen Transversalen von B' u. B'',
in das System (0,1) der Geraden, welche die Ebene (A B') ausfüllen,
in das System (0,1) " " " " (A B'') "

Eben diese Ausartung laſse man nun bei beiden vorgegebenen Raumcurven dritter Ordnung, bez. ihren Secantensystemen eintreten. Dann ist die Zahl der gemeinsamen Secanten leicht abzuzählen. Nämlich: die beiden Systeme (1,1) haben 2 Gerade gemein (es giebt zu 4 beliebig im Raume gegebenen Geraden 2 gemeinsame Transversalen).

Jeder der 2 Systeme (1,1) hat mit jedem der beiden anderen Systeme (0,1) je eine Gerade gemein, ... 4 Gerade. Jeder der beiden Systeme (0,1) der einen Curve hat mit jedem der beiden Systeme (01) der anderen Curve auch je eine Gerade gemein, – abermals 4 Gerade.

Das sind im Ganzen 10 Gerade und hieraus schlieſsen wir vermöge des „Princips der speciellen Lage", daſs die Zahl der gesuchten Secanten auch im allgemeinen Falle 10 beträgt.

Was sollen wir hierzu sagen? Bemerken wir zunächst, daſs das Princip illusorisch werden kann, sofern in dem speciellen Falle, den man betrachten will, die abzuzählende Anzahl möglicherweise unendlich wird. So wird man die Zahl der Wendepunkte einer Curve n^{ter} Ordnung nicht an einer Curve abzählen können, welche in n Gerade zerfallen ist; denn da wird die Zahl eben ∞. Man wird vielmehr, wenn man eine zerfallende Curve betrachten will, nur eine solche heranziehen dürfen, deren sämmtliche Bestandtheile von höherem als 1^{ten} Grade sind. – Aber wenn wir von den hiermit bezeichneten Fällen absehen, müſsen wir sagen, daſs das Princip als solches völlig richtig ist.

Man denke sich die zu bestimmende Zahl als den Grad einer aus der vorgegebenen Problemstellung hervorgehenden Eliminationsgleichung. Wenn wir jetzt die Constanten der Problemstellung irgendwie specialisiren, so kann besagter Grad sich dabei in der That nicht abändern, es kann höchstens, und das ist der Fall wo das Princip illusorisch wird, die Eliminationsgleichung identisch verschwinden. Nur auf zwei Punkte wird man bei Anwendung des Princips achten müſsen. Erstlich muſs der besondere Fall, den man betrachten will, wirklich als Einzelfall in dem vorgegebenen allgemeinen Fall enthalten sein. So wäre es beispielsweise unstatthaft, die Raumcurve 3. Ordnung in dem letzt betrachteten Beispiel durch 3 zu einander windschiefe Gerade ersetzen zu wollen. Zweitens muſs man, wie kaum hervorgehoben zu werden braucht, jede einzelne im Specialfalle sich darbietende Lösung mit der richtigen Multiplicität zählen. —

[Fr. 13. 5. 92.] In historischer Hinsicht dürfen wir hinzufügen, daſs das in Rede stehende Princip in umfaſsender Weise zuerst von de Jonquières in seiner groſsen Abhandlung in Crelle 66 (1866) angewandt worden ist, (Abzählung von Berührungscurven gegebener ebener Curven). Es ist dann später von Schubert zur gleichförmigen Grundlage der ganzen „abzählenden Geometrie" gemacht worden. Man vergleiche die zahlreichen Abhandlungen Schubert's insbesondere in den mathematischen Annalen (von Bd. 10 beginnend, 1876), sowie den zuſsammenfaſsenden, *Kalkül der abzählenden Geometrie* 1879 deſselben Verfaſsers. Schubert hat dort von dem Prinzip der speciellen Lage bei allen möglichen Aufgaben eine ebenso kühne als erfolgreiche Anwendung gemacht. Er hat daneben (wie ich beiläufig bemerken darf) unsere geometrischen Auffaſsungen wesentlich erweitert, indem er zahlreiche Arten geometrischer Gebilde neu in die Betrachtung einführte. Aber freilich arbeitet er mehr mit der Phantasie als mit der Kritik, und es ist eine Nothwendigkeit, die ich oft schon betont habe und hier erneut hervorheben will, daſs jüngere Forscher, welche durch die strenge Schule der Functionentheorie hindurchgegangen sind, die Schubert'schen Entwickelungen aufnehmen und sicher stellen, beziehungsweise mit denjenigen Ergänzungen versehen möge, die da nothwendig scheinen. –

Gemeinsam ist den dreierlei hiermit besprochenen Abzählungs„principen" die Tendenz, von der wirklichen Aufstellung algebraischer Formeln abzusehen und nur mit den Begriffen der Algebra zu operiren. Inzwischen ist klar, daſs die algebraische Formel, sofern wir sie aufstellen können, *mehr* giebt als bloſs den Grad der Eliminationsgleichung. Wenn wir z. B. für die Berührungspunkte der vom Punkte ($c_1 c_2 c_3$) an die Curve $f(x_1 x_2 x_3) = 0$ laufen-den Tangenten die Gleichungen der Polare aufstellen: $c_1 \frac{\partial f}{dx_1} + c_2 \frac{\partial f}{dx_2} + c_3 \frac{\partial f}{dx_3} = 0$, so giebt das uns nicht nur die Zahl besagter Berührungspunkte, sondern gleich den Satz, dass dieselben ein volles Schnittpunktsystem auf $f = 0$ bilden, etc. etc., insbesondere giebt es uns, wenn wir darauf Gewicht legen wollen, den Ansatz auch zur numerischen Berechnung der Berührungspunkte. Deshalb erscheint es als rationelles Problem, *die blossen Abzählungsmethoden* die wir seither besprachen, *durch parallellaufende* analytische Entwickelungen einerseits *zu stützen, andererseits zu ergänzen*.

Das ist die Tendenz, welche *Brill* in seinen hierher gehörigen Abhandlungen verfolgt hat. Ich nenne

4 Abhandlungen über Elimination und Berührungsprobleme in den Bänden 4 u. 5 der math. Annalen (1871, 72),

4 Abhandlungen über das erweiterte Correspondenzprincip - Annalen 6 (1873), 7 (1874), 31 (1887), 36 (1890).

Um doch ein Beispiel von den analytischen Formulierungen zu geben, um welche es sich dabei handelt, nehmen wir etwa das Problem der vielfachen Secanten einer Raumcurve.

Wir stellen die Raumcurve etwa in der Art dar, dass wir $\varrho x_i = \varphi_i(x_1 \lambda_2 \lambda_3)$ setzen, $i = 1, 2, 3, 4$, wo zwischen den 3 homogen auftretenden $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$ irgend eine vorgegebene Relation $f(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3) = 0$ (vielleicht höheren Geschlechtes) bestehen mag. Sollen nun 4 Punkte $\lambda, \mu, \nu, \sigma$ der Raumcurve auf einer geraden Linie liegen, so hat man offenbar zu verlangen, daſs neben den Gleichungen

$$f(\lambda)=0\ ,\quad f(\mu)=0\ ,\quad f(\nu)=0\ ,\quad f(\sigma)=0$$

alle 3 gliedrigen Determinanten des folgenden Schemas verschwinden sollen:

$$\left|\begin{array}{cccc} \varphi_1(\lambda) & \varphi_2(\lambda) & \varphi_3(\lambda) & \varphi_4(\lambda) \\ \varphi_1(\mu) & \varphi_2(\mu) & \varphi_3(\mu) & \varphi_4(\mu) \\ \varphi_1(\nu) & \varphi_2(\nu) & \varphi_3(\nu) & \varphi_4(\nu) \\ \varphi_1(\sigma) & \varphi_2(\sigma) & \varphi_3(\sigma) & \varphi_4(\sigma) \end{array}\right|$$

Derartige „Matrixgleichungen", um gleich den allgemeinsten Typus zu bezeichnen, sind es immer, mit denen Brill sich beschäftigt. Dabei beschränkte er sich übrigens nicht (wie auch Schubert in seinen späteren Arbeiten) auf solche Probleme, die sich bei den Curven der Ebene oder des dreimensionalen Raumes darbieten, sondern erstreckt seine Untersuchungen ebensowohl auf mehrdimensionale Räume. Es ist dies eine Verallgemeinerung der analytisch-geometrischen Fragestellungen, welche in den 70er Jahren allgemein zum Durchbruch gekommen ist, wie wir hernach im Zusammenhange noch ausführlicher berichten müſsen. —

So viel über die Abzählungsfragen bei Raumcurven (wo, bei wir ursprünglich von Cayley's Uebertragung der Plücker'schen Formeln auf Raumcurven ausgegangen waren).

Indem wir die Analogie mit den früheren Betrachtungen über ebene Curven festhalten, werden wir noch über zweierlei Fragen betreffend Raumcurven berichten wollen:

1. Schnittpunktsätze, 2. Realitätsverhältnisse.

In beiderlei Hinsichten haben wir allerdings nur über Anfänge zu berichten, auch wenn wir über die Periode 1850-1870, die hier zunächst zur Discussion steht, wie wir vorhin auch schon thaten, ein wenig hinausgreifen wollen.

Sei, um mit den Schnittpunktsätzen zu beginnen, eine C_m im Raume gegeben. Wir schneiden mit einer F_μ und bekommen $m\,\mu$ Schnittpunkte. Jetzt hat die Gleichung einer F_μ $M = \frac{(\mu+1)}{1}\frac{(\mu+2}{2}\frac{(\mu+3)}{3}$ Coëfficienten; es giebt also $^{M-1}F_\mu$. Wir nehmen ferner an, es gäbe ϱ linear unabhängige F_μ welche durch unsere Curve gehen (welche die Curve „enthalten"). Die Zahl der unterschiedenen Schnittpunktsysteme von C_m und F_μ ist dann $\infty^{M-1-\varrho}$. Die $m\,\mu$ Schnittpunkte hängen also nur von $M-1-\varrho$ Parametern ab, oder anders ausgesprochen: zwischen den $m\mu$ Schnittpunkten auf C_m bestehen $m\,\mu+1+\varrho-M$ Bedingungen. Dies ist der allgemeine Schnittpunktsatz. Man sieht, daſs es vor allen Dingen darauf ankommt, in jedem Falle die Zahl ϱ zu bestimmen.

Wir nehmen zuerst das Beispiel der vollen Schnittcurve zweier Flächen von den Ordnungen m' und m'':

$$f_{m'}=0 \quad , \quad f_{m''}=0$$

Sei hier $m' \leqq m''$. So werden wir, um die Zahl ϱ der F_μ zu bestimmen, welche durch die Curve gehen, unterscheiden müssen, ob

$1)\ \mu < m'$, $2)\ \mu \left\{ \begin{matrix} \geqq m' \\ < m'' \end{matrix} \right.$, $3)\ \mu \begin{matrix} \geqq m'' \\ < m'+m'' \end{matrix}$, $4)\ \mu \geqq m'+m''$.

1) Im ersten Falle ist $\varrho = 0$

2) Im zweiten Falle werden alle diejenigen Flächen μ^{ter} Ordnung durch die Curve gehen, deren Gleichung ist $u \cdot f_{m'} = 0$, unter u einen beliebigen Ausdruck vom Grade $\mu - m'$ verstanden. Daher ist hier

$$\varrho = \frac{(\mu-m'+1)(\mu-m'+2)(\mu-m'+3)}{1.\ 2.\ 3.}$$

3) Im dritten Falle treten den genannten Flächen noch analog gebildete $v \cdot f_{m''} = 0$ hinzu, wo v vom Grade $\mu - m''$ ist. Somit kommt:

$$\varrho = \frac{(\mu-m'+1)(\mu-m'+2)(\mu-m'+3)}{1.\ 2.\ 3.} + \frac{(\mu-m''+1)(\mu-m''+2)(\mu-m''+3)}{1.\ 2.\ 3.}$$

4) Im vierten Falle hat man ebenfalls alle die Flächen $u \cdot f_{m'} = 0$, $v \cdot f_{m''} = 0$. Aber unter ihnen sind jetzt eine Reihe identisch. Man erhält sämmtliche hier in Betracht kommenden Identitäten, wenn man den identisch verschwin-

in den Ausdruck vom Grade $m' + m''$:

$$\varphi_{m''}\cdot f_{m'} - f_{m'}\cdot \varphi_{m''}$$

mit irgendwelchem Ausdrucke w vom Grade $\mu - m' - m''$ multipliciert. Daher ist der unter 3) gegebene Ausdruck für ϱ jetzt um

$$\frac{(\mu - m' - m'' + 1)(\mu - m' - m'' + 2)(\mu - m' - m'' + 3)}{1.\ 2.\ 3.}$$

zu vermindern.

Uebrigens werden wir jetzt $m = m'm''$ zu setzen haben. Ich gehe nicht weiter in die Einzelheiten der Rechnung ein. Das Resultat ist,

dass für $\mu \geqq m' + m''$ allemal $\frac{m'm''(m'+m''-4)}{2} - 1$ Bedingungen zwischen den $m\,\mu$ Punkten bestehen,

dass dieselbe Zahl auch noch richtig bleibt, wenn $\mu \geqq m' + m'' - 3$ ist, dass sie um eine Einheit sinkt, sobald $\mu = m' + m'' - 4$ wird,

und dass sie weiter sinkt, wenn man zu noch kleineren Werthen von μ schreitet.

Dabei beachte man, dass die Zahl $\frac{m'm''(m'+m''-4)}{2} - 1$ nach unseren früheren Untersuchungen gerade das p der vollen Schnittcurve vorstellt!

Die hiermit für volle Schnittcurven gegebene Abzählungsmethode ist erst ganz neuerdings von Hilbert in seiner wiederholt genannten Abhandlung in Bd. 36 der Annalen (1890) auf beliebige Raumcurven ausgedehnt worden.*)

---

*) Hilbert selbst betrachtet nicht nur Raumcurven, sondern beliebig ausgedehnte

Wir lernten bereits den Satz kennen, daſs jede Raumcurve einen „endlichen Modul" vorstellt, d.h. daſs man immer eine endliche Zahl von Flächen ,

$$F_1 = 0,\ F_2 = 0 \ldots\ldots\ldots F_\sigma = 0$$

so auswählen kann, daſs jede andere Fläche, die durch die Raumcurve geht, sich in der Gestalt

$$F = M_1 F_1 + M_2 F_2 + \ldots\ldots\ldots M_\sigma F_\sigma$$

darstellen läſst (so daſs also, in der Sprache der Modultheorie ausgedrückt, $F \equiv 0 \ (\text{modd}\ F_1, F_2, \ldots F_\sigma)$). Die M_1, $M_2 \ldots\ldots M_\sigma$ sind hier Polynome, die beim Gebrauch homogener Variabler (den Hilbert voraussetzt) natürlich dem Homogeneitätsgesetz entsprechend auszuwählen sind. Wollen wir nun abzählen, wie viele Constante in der allgemeinsten durch die Curve gehenden F_α noch willkürlich sind, so brauchen wir nur eine Uebersicht über die zwischen den $F_1, F_2 \ldots F_\sigma$ bestehenden *Syzygieen* zu haben. Da sind erstlich *Syzygieen erster Ordnung*, d.h. identische Relationen der Form

$$X_1 F_1 + X_2 F_2 + \ldots\ldots X_\sigma F_\sigma \equiv 0,$$

dann *Syzygieen zweiter Ordnung*, nämlich syzygetische Relationen zwischen den Syzygieen erster Ordnung etc.

---

algebraische Gebilde eines Raumes von beliebig vielen Dimensionen; das bleibt hier natürlich auſser Betracht.

Hierüber stellt nun Hilbert den Satz auf:

Daſs die Zahl der linear unabhängigen Syzygieen erster Ordnung, wie auch der Syzygieen zweiter Ordnung etc. allemal eine endliche ist.

daſs aber auch die Kette der aufeinanderfolgenden Syzygieen keine unendliche ist, vielmehr bei n homogenen Variabelen spätestens bei der (n-1)ten Ordnung, also bei unseren Raumcurven bei den Syzygieen 3ter Ordnung abbricht.

Ich werde nun auf die nähere Abzählung der in F_μ schliesslich noch willkürlich bleibenden Constanten um so weniger eingehen, als Hilbert in dieser Hinsicht selbst wenig ausführlich ist. Nur diesen einen Satz will ich anführen (der auch schon in den später zu besprechenden Untersuchungen *Nöthers* in Bd. 93 des Journals, 1882 vorkommt):

daſs nämlich bei jeder Curve C_m^l ohne Doppelpunkt eine endlich Gränze für den Grad μ der schneidenden Fläche $F_\mu = 0$ angegeben werden kann, jenseits deren zwischen den $m\,\mu$ Schnittpunkten genau p Relationen bestehen, unter p das Geschlecht der Curve verstanden.

Dieser Satz, der uns eben bereits bei den vollen Durchschnittscurven entgegengetreten war, wird uns ganz besonders interessiren, wenn wir an die Unterscheidung des vorigen Wintersemesters zwischen *rationalen ganzen Formen* $g(x_1, x_2, \dots\dots)$ und *algebraischen ganzen Formen* $G(x_1, x_2, \dots\dots)$ zurück.

denken. Wir hatten die φ, T damals insbesondere für ebene Curven definirt, aber die Definition überträgt sich natürlich ohne Weiteres auf Raumcurven. Da ist denn das Verhältniſs dieses, daſs die φ irgend welcher Ordnung μ zunächst specielle Fälle der T_μ sind. Nach dem Riemann-Roch'schen Satze bestehen aber zwischen den μm Nullpunkten einer T_μ, sofern wir niedere Werthe von μ ausschlieſsen, z. B. $\mu m > 2p-2$ nehmen, genau p Bedingungen. Insofern die φ_μ specielle Fälle der T_μ sind, werden zwischen den $m\mu$ Nullpunkten einer φ_μ mehr als p Bedingungen bestehen müſsen. Wenn daher Hilbert-Nöther behaupten, daſs bei einer doppelpunktlosen C_m für die $m\mu$ Nullpunkte einer φ_μ bei hinreichend hohem μ auch gerade p Bedingungen bestehen, so bedeutet das, daſs bei diesen Curven für hinreichend hohes μ die φ_μ und T_μ sich decken! –

Wir haben damit vorgreifend eine Reihe von Dingen erwähnt, die erst in den letzten Jahren entwickelt worden sind; wir kehren jetzt zu unserem Berichte über 1850 – 70 zurück und berühren noch kurz die Untersuchungen über:

Realitätsverhältniſse der Raumcurven.

Da ist an allgemeinen Sätzen wenig zu nennen. Es ist vermuthlich das Verdienst von Monge, durch Zeichnungen und Modelle ganz klar gemacht zu haben, daſs eine Raumcurve allemal „Rückkehrcurve" der von ihren Tangenten gebildeten Developpablen ist.

Folgeweise mag man untersuchen, wie sich die Verhältniſse in solchen Curvenpunkten gestalten, die entweder selbst stationär sind, oder in denen eine stationäre Ebene berührt etc. Die so entstehenden Sätze gelten unterschiedslos für alle *analytischen* Curven; bei den *algebraischen* Curven tritt vor Allem dieses hinzu, dass eine algebraische Curve immer nur aus einer *endlichen Zahl in sich selbst zurücklaufender Curvenzüge* besteht. Zum Beweise genügt es sich zu erinnern, daſs der entsprechende Satz für ebene algebraische Curven gilt, und dass die Projection einer algebraischen Raumcurve von irgend welchem Punkte aus auf eine Ebene doch wieder eine algebraische Curve ist. Diese Züge selbst mag man dann mit v. Staudt in „paare" und „unpaare" eintheilen. Da die unpaaren Züge jeder Ebene mindestens einmal begegnen und also auch das ∞. Ferne mindestens einmal durchsetzen, liegen sie der täglichen Gewöhnung ferner, als die paaren Züge.

Wir wenden uns gleich zur Betrachtung der niedersten Raumcurven.

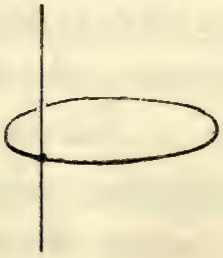
a. Raumcurven dritter Ordnung. Deren Theorie ist besonders einfach, weil alle reellen, nicht ausgearteten Raumcurven dritter Ordnung reell projectiv miteinander sind. Die Curve besteht nothwendig aus *einem unpaaren Zuge*, welcher rechts herum oder linksherum gewunden sein kann.

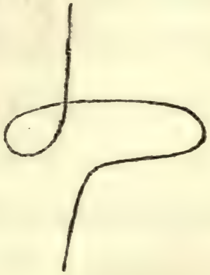
(Das ist noch einfacher, als bei den Curven 2. Ordnung: bei ihnen haben wir nulltheilige und eintheilige zu unterscheiden). Vom metrischen Standpunkte wird man unterscheiden, ob die Curve die ∞. ferne Ebene

nur in einem reellen Punkte, oder
in drei getrennten reellen Punkten durchsetzt,
oder einmal schneidet und einmal berührt,
oder endlich osculirt.

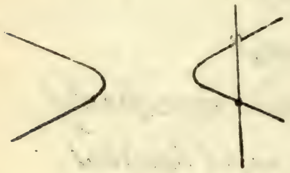
Es ist dies der Fall der „cubischen Ellipse", der „cubischen Hyperbel", und der zweierlei Arten „cubischer Parabeln".

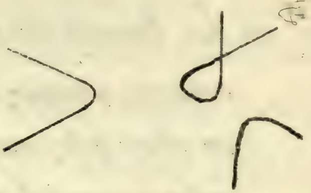
Wir bekommen eine bequeme Anschauung dieser verschiedenen Curventypen, wenn wir zunächst eine ausgeartete Curve construiren, nämlich eine solche, die in einen Kegelschnitt und eine den Kegelschnitt treffende Gerade zerfällt, die also einen wirklichen Doppelpunkt darbietet, – und dann den Doppelpunkt in bekannter Weise auflösen. So giebt die Combination von Ellipse und gerader Linie die cubische Ellipse:





die Combination von Hyperbel und gerader Linie die cubische Hyperbel:





etc. Zwecks genauer Modellirung ist es bequem, die Kegel zweiter Ordnung zu betrachten, vermöge deren sich die Curve von einem beliebigen ihrer Punkte ausprojicirt, insbesondere die bez. Kegel, welche von den ∞ fernen Punkten der Curve auslaufen, d.h. die *Cylinderflächen zweiten Grades*, auf denen die Curve liegt. Die cubische Ellipse liegt auf einem einzelnen solchen Cylinder, nämlich einem elliptischen Cylinder, die Hyperbel auf drei verschiedenen hyperbolischen Cylindern, die erste der beiden cubischen Parabeln auf einem parabolischen und einem hyperbolischen Cylinder, die zweite auf einem parabolischen Cylinder. Hiervon ist bei den Modellen Gebrauch gemacht, die ich durch Hrn. *Lange* für den Brill'schen Verlag habe anfertigen lassen. Ich würde jetzt vorziehen, lieber *freie* Modelle zu haben, d.h. einfache Darstellungen der in Betracht kommenden Raumcurven durch einen gebogenen, hinreichend widerstandsfähigen Draht. Ich fand solche Modelle im Leipziger physiologischen Institute. Die Physiologen interessiren sich für die Raumcurven dritter Ordnung, weil sie den sogenannten „Horopter" geben, d.h. den geometrischen Ort derjenigen Raumpunkte, deren Bilder beim Sehen mit zwei Augen, irgendwelche feste Stellung der beiden Augenaxen vorausgesetzt, auf correspondirende Stellen der beiden Netzhäute fallen (cf. *Helmholtz* Physiologische Optik).

b. Raumcurven vierter Ordnung erster Species.

Die Raumcurven vierter Ordnung erster Species sind von je in der darstellenden Geometrie vielfach untersucht worden. Sind $\varphi = 0$, $\psi = 0$ zwei der durch die Curve gehenden Flächen 2ter Ordnung, so hat man in $\varphi - \lambda\psi = 0$ ein ganzes Büschel solcher Flächen und findet in ihm, indem man die Determinante von $\varphi - \lambda\psi = 0$ gleich Null setzt, insbesondere *vier* durch die Curve gehende Kegel zweiter Ordnung.

Ich will hier Besonderheiten, wie das Auftreten von wirklichen Doppelpunkten oder Spitzen bei der Curve, bei Seite lassen. Ich habe dann noch 4 Arten unserer C_4 zu unterscheiden:

1. *Die nulltheilige Curve.* Die 4 Kegel sind reell (d.h. ein jeder hat eine reelle Gleichung), aber zwei derselben sind nulltheilig.

2. *Die eintheilige Curve.* Zwei reelle eintheilige Kegel

3. *Die zweitheilige, aus 2 paaren Zügen bestehende Curve.*

Alle 4 Kegel sind reell und eintheilig.

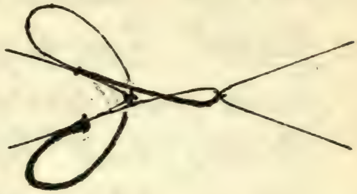
4. *Die zweitheilige, aus 2 unpaaren Zügen bestehende Curve.* Alle Kegel sind imaginär, sämmtliche durch die Curve laufende Flächen 2ter Ordnung sind einschalige Hyperboloide.

Wegen genauer Begründung dieser Aufzählung vergl. *Cremona's* Theorie der Oberflächen (1870) oder auch meine Vorlesung über projective Geometrie vom Sommer 1881. Man hat auch ausgeführte Modelle der genannten Curven mit den zugehörigen Developpablen und Kegelflächen (Brill'scher Verlag); die Modelle von *Björling*, die wir in unserer Sammlung haben, repräsentiren leider nur einzelne Fälle.

Ich nenne ferner, indem ich auf moderne Entwickelungen herübergreife:

[Do. 19.5.92] *c. Raumcurven vierter Ordnung zweiter Species.*

Es ist sehr leicht sich von einer solchen Curve im Beispiele ein ungefähres Bild zu machen. Die Curve liegt, wie wir wiſsen, auf einer Fläche zweiten Grades, und diese Fläche muſs, sofern die Curve reell sein soll, nothwendig ein einschaliges Hyperboloid sein, insofern sich ja die Curve gegen die beiden Schaaren der Erzeugenden der Fläche ungleichartig verhalten soll. Andererseits giebt die Curve irgendwie auf eine Ebene projicirt eine ebene Curve vierter Ordnung mit 3 Doppelpunkten. Man zeichne jetzt eine derartige ebene Curve und füge einen Kegelschnitt hinzu, der die Curve viermal berührt (Die Hyperbel in der nebenstehenden Figur). Es genügt jetzt, diesen Kegelschnitt als den scheinbaren Umriſs eines einschaligen Hyperboloids aufzufaſsen und die einzelnen Stücke, in welche unsere Curve 4. Ordnung durch die 4 Berührungspuncte mit dem Kegelschnitt zerfällt, abwechselnd auf die Vorderseite und die Rückseite dieses Hyperboloids zu verlegen (wie dies in der Figur durch stärkeres und schwächeres Ausziehen der Curvenstücke angedeutet ist). Wir erhalten so natürlich nur erst ein Beispiel einer Raumcurve 4. Ordnung zweiter Species. Es würde darauf ankommen, alle möglichen Gestalten, die eine solche Raumcurve darbieten kann, von dem genannten Ansatze aus zu erschöpfen. In dieser Hinsicht sind die Modelle zu nennen, welche Hr. Rohn ganz neuerdings (1891) im Brill'schen Verlage hat erscheinen laſsen; dieselben repräsentiren sowohl das die Curve tragende einschalige Hyperboloid, wie insbesondere die zur Curve gehörige developpable Fläche durch gespannte Fäden.



Mit den sogenannten Fällen a, b, c sind wohl alle algebraischen Raumcurven erschöpft, die man bisher in

gestaltlicher Hinsicht genauer untersucht hat. Allgemeinere Bemerkungen zur Theorie der gestaltlichen Verhältniſse der algebraischen Raumcurven sind mir aus neuerer Zeit noch von Hilbert, Franz Meyer und Brill bekannt; ich schlieſse
57. bez. Bericht gleich hier an.

Hilbert (Math. Annalen 38) knüpft an die Arbeit von Harnack an, über die wir auf p. 251 der Wintervorlesung berichteten, sowohl dem Resultate nach – Harnack zeigte, daſs die Zahl der unterschiedenen Züge einer ebenen Curve die Zahl $p+1$ erreichen, aber nicht überschreiten kann –, als auch der Methode nach. Harnack stellt durch Einführung bestimmter, der geometrischen Interpretation zugänglicher Gleichungsformen die Curven, welche er als existent nachweisen will, immer wirklich her –. Er untersucht nun insbesondere die Raumcurven vom Maximalgeschlecht. Wir müſsen dabei vorgreifend berichten, daſs nach einem von Halphen im Jahre 1870 in den Comptes Rendus ausgesprochenen Theoreme (C. R. t. 70) das Geschlecht einer nicht ebenen Raumcurve m^{ter} Ordnung nur bis $\frac{(m-2)^2}{4}$, bez. $\frac{(m-1)(m-3)}{4}$ steigen kann, und daſs eine Curve, welche dieses Maximalgeschlecht erreicht, nothwendig auf einer Fläche 2^{ten} Grades liegt. Hilbert nimmt $m > 5$ und unterscheidet die Fälle, wo m

$$= 4\mu, \quad 4\mu+1, \quad 4\mu+2, \quad 4\mu+3.$$

Er findet dann, daſs die Curve allemal wirklich $p+1$ reelle Züge haben kann, und daſs die Zahl ihrer unpaaren Züge insbesondere zu

$$2\mu-2\,,\quad 2\mu-1.\qquad 0,\qquad 2\mu-1.$$

ansteigen kann. Daneben verschiedene intereſsante Einzelheiten auch über die Gestalt der ebenen Curven. –

Franz Meyer unternimmt in den Göttinger Nachrichten von 1891 jene Relation zwischen den Singularitäten ebener Curven, über die auf p 251 ff der Wintervorlesung berichtet ist, auf Raumcurven zu übertragen. Die Relation für ebene Curven lautete, sofern wir das Auftreten singulärer Punkte hier ausschlieſsen wollen.

$$w'+2t''=m(m-2);$$

hier ist w' die Zahl der reellen Wendungen, t'' die Zahl der reellen isolirten Doppeltangenten. Fr. Meyer findet nun dementsprechend für singularitätenfreie Raumcurven von m^{ter} Ordnung nur eine Congruenz:

$$w'+d'+t'-2T''.\equiv \mathcal{C}\ (\text{mod.}\ 4).$$

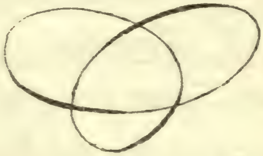
Hier bezeichnet (in leicht verständlicher Abkürzung)

w' die Zahl der reellen Ebenen α^4,
t' die Zahl der reellen Ebenen $\alpha^3\beta^2$,
T'' die Zahl der reellen Ebenen $\alpha^2\beta^2\gamma^2$, welche die Curve in nur einem reellen Punkte berühren,
d' die Zahl der reellen Geraden $\alpha^2\beta$,

C' aber ist für alle Curven m^{ter} Ordnung, welche derselben Species angehören, d. h. welche durch continuirliche Aenderung der Parameter in einander übergeführt werden können, eine im Allgemeinen nicht näher bekannte Constante.

Die Arbeit von *Brill*, welche hier zu nennen ist, datirt bereits vom Jahre 1881 (Ann. Bd. 18) und wird hier nur darum an letzter Stelle aufgeführt, weil sie diejenige Fragestellung bei den Raumcurven betrifft, über die man am wenigsten weiſs, trotzdem sie dem unmittelbaren Interesse der Anschauung besonders nahe liegt. Geschloſsene Curvenzüge können mit sich selbst oder miteinander ein- oder mehrfach *verschlungen* sein. Das ist ein Gegenstand, der im Sinne der Analysis situs (der Topologie) vielfach untersucht wurde, so insbesondere von *Tait* in den Edingburgh Transactions von 1879, 1884, 1886; ausführlichere Literaturnachweise findet man bei *Dyck* in Ann. 32, p. 459-460 zusammengestellt. Wie aber stellen sich diese Dinge, sofern man insbesondere algebraische Curven in Betracht zieht? Man mag zunächst bemerken, daſs die rein gestaltlichen Untersuchungen, auf die ich gerade Bezug nahm, noch einer Erweiterung bedürfen, ehe sie für die Frage der betr. Eigenschaften algebraischer Curven als Grundlage dienen können. Sie beziehen sich nämlich durchweg auf Curvenzüge, die im Endlichen geschloſsen sind;

es wird also nothwendig sein, sie auf Curvenzüge auszudehnen, die das Unendlichweite durchsetzen, insbesondere auf unpaare Curvenzüge. Brill hat nun l. c. eine erste hier sich darbietende Frage erledigt. Eine ebene Curve vierter Ordnung mit 3 Doppelpunkten kann als Projection einer Raumcurve gedacht werden, welche eine einfache Verschlingung mit sich selbst darbietet, wie nebenstehende



Figur aufweist: Welches ist die niederste algebraische Raumcurve, die eine solche Projection aufweist? Brill findet, daſs dies eine (natürlich rationale) Curve fünfter Ordnung ist; man hat dieselbe von irgend welchem Punkte des einen Curvenzugs, den sie überhaupt besitzt, zu projiciren, also etwa, wenn wir diesem Curvenzuge eine Asymptote geben wollen (eine hat er mindestens), von seinem einem unendlich fernen Curvenpunkte aus. Man kann aber unsere Figur auch erhalten, indem man eine rationale Curve sechster Ordnung, die einen isolirten Punkt besitzt, von eben diesem Punkte projicirt, und hat dann den Vortheil, daſs man die Raumcurve ganz im Endlichen gelegen annehmen kann. –

Bei den hiermit besprochenen Arbeiten von Hilbert, Fr. Meyer, Brill handelt es sich, wie man sieht, übereinstimmend um specielle Fragen. Um so erwünschter wird es sein, wenn wir weiterhin im Verfolg der Riemann'schen Theorie, wie ich hoffe, dazu kommen werden, wenigstens einiges Allgemeine über die realen Gestalten algebraischer Raumcurven in Erfahrung zu bringen. Aber vorher müſsen wir unser Referat über die seitherige Entwickelung der Theorie der Raumcurven noch erst zu Ende bringen. Ich wende mich diesbezüglich jetzt zur

B. Zweiten Periode (von 1870 an).

Zwei Ideen sind es, welche dieser zweiten Periode ihre Signatur gegeben haben:

erstlich die Tendenz, welche wesentlich auf Clebsch zurückgeht, die Theorie der Curven mit der Riemann'schen Theorie der algebraischen Functionen in Verbindung zu setzen (Clebsch 1863, Journal Bd. 64: Ueber die Anwendung der Abel'schen Functionen in der Geometrie), zweitens das Heranziehen mehrdimensionaler Anschauungsweisen (wo dann ebene Curven und Raumcurven nur als Anfangsglieder der unendlichen Kette von Curven in Räumen von steigender Dimensionzahl erscheinen).

Clebsch selbst hat seine vorbezeichnete Tendenz nur nach ihren allgemeinen Umrissen skizzirt (vergl. insbesondere auch die Abel'schen Functionen von Clebsch und Gordan, 1866) und seiner Schule gewiſsermaſsen als Erbschaft hinterlaſsen. Die grundlegende Ausführung der selben erfolgte erst 1873 durch Brill u. Nöther (zuerst in den Göttinger Nachrichten, dann in Bd. 7 der Annalen).

Wir haben auf die bezügliche Abhandlung*) bereits im Winter vielfach Bezug genommen, indem sich dieselbe ja keineswegs auf Raumcurven beschränkt, vielmehr diese nur mehr beiläufig berührt; trotzdem wollen wir dieselbe bei ihrer hervorragenden Wichtigkeit hernach im Zusammenhange ausführlich besprechen. Vorher aber gedenken wir der Sätze (auf die wir soeben auch schon Bezug nahmen), die Halphen in den Comptes Rendus von 1870 (Bd. 70) sowie 1873-74 in Bd. 2 des Bulletin der Société Mathématique veröffentlicht hat. Es handelt sich da zunächst um das Maximalgeschlecht der Raumcurven m^{ter} Ordnung.

Wir bemerkten schon, daß dasselbe $\frac{(m-2)^2}{4}$, bez. $\frac{(m-1)\cdot(m-3)}{4}$ beträgt (jenachdem m gerade oder ungerade ist) und daß eine C_m, welche dieses Geschlecht besitzt, nothwendig auf einer F_2 liegt. Halphen theilt auch Gränzen mit, welche das Geschlecht einer C_m nicht überschreiten kann, wenn durch die C_m keine niedere Fläche durchgehen soll, als eine Fläche dritter Ordnung oder eine Fläche vierter Ordnung etc, (doch bedürfen diese Sätze wohl noch der Controle). Er bemerkt ferner, daß die Constantenzahl einer C_m „im Allgemeinen" 4m beträgt, – ein merkwürdig eleganter Satz. Er hebt endlich hervor, daſs zwei C_m, welche zu dem nämlichen Geschlecht gehören (dieselbe Zahl scheinbarer Doppelpunkte besitzen) doch noch grundverschieden sein können. So hat man zweierlei C_9 mit 18 Doppelpunkten, eine jede mit 36 Constanten, nämlich die volle Durchschnittscurve zweier Flächen dritter Ordnung und den Restschnitt einer Fläche 2ten und 6ten Grades, die drei windschiefe Gerade gemein haben. Wir nennen hier diese Sätze, weil wir Gelegenheit haben werden, auf sie vom Riemann'schen Standpunkte zurückzukommen. Wie weit Halphen in jener Zeit die Riemann'schen Entwickelungen selber durchgedacht hat, ist nicht recht zu sehen.

---

*) „Ueber die algebraischen Functionen und ihre Anwendung in der Geometrie."

[Fr. 20. 5. 92.] Nun zu der Abhandlung von Brill und Nöther!

Wir rubriciren die in ihr enthaltenen Entwickelungen unter dreierlei Kategorieen:

1. Verschmelzung der Riemann'schen Sätze über algebraische Functionen mit den geometrischen Constructionen an der Curve.

Nehmen wir, um die Ideen zu fixiren, gleich eine Curve des dreidimensionalen Raumes x_1, x_2, x_3, x_4; der Ausdruck $\frac{c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4}{f_4}$ stellt auf der Curve eine 4 gliedrige lineare Schaar m-werthiger Functionen mit gemeinsamen Unendlichkeitsstellen dar. Aber er verschwindet in den m Punkten, in denen die Curve von der Ebene $c_x = 0$ geschnitten wird. Daher sind die sämmtlichen Gruppen von je m Punkten, in denen die Curve von einer beliebigen Ebene geschnitten wird, aequivalent". Umgekehrt: hat man irgend eine 4 gliedrige lineare Schaar algebraischer Functionen $c_1 f_1 + c_2 f_2 + c_3 f_3 + c_4$, so kann man zugehörige Raumcurven construiren, deren ebene Schnitte mit den Nullstellen der einzelnen Functionen $\Sigma c_i f_i$ coïncidiren; man hat einfach $\frac{x_1}{x_4} = f_1$, $\frac{x_2}{x_4} = f_2$, $\frac{x_3}{x_4} = f_3$ zu setzen. Alle die ∞ vielen Raumcurven, welche man so aus derselben Riemann'schen Fläche erhält, erscheinen uns als coordinirt. Jede einzelne versinnlicht uns, sofern wir sie unter projectiven Gesichtspunkten betrachten also die unendlich ferne Ebene nicht auszeichnen wollen, eine der „dreifach ausgedehnten linearen Schaaren aequivalenter Punktgruppen", die auf der Riemann'schen Fläche existiren. Für die Mannigfaltigkeit dieser Raumcurven ist natürlich der Riemann-Roch'sche Satz fundamental.

Dies ist, an dem Beispiele der Raumcurven erläutert, der Grundgedanke, der die ganze Brill-Nöthersche Arbeit durchzieht, und wir können hier nur etwa noch dieses hinzufügen, daſs Brill-Nöther von der entsprechenden Auffassungsweise bez. Curven, die in höheren Räumen gelegen sind, noch keinen expliciten Gebrauch machen, vielmehr vorziehen, statt von den ebenen Schnitten einer solchen Curve von einer „q fach ausgedehnten linearen Schaar aequivalenter Punktgruppen von je Q Punkten, $g_Q^{q''}$, auf dem zu Grunde gelegten algebraischen Gebilde zu sprechen. Dies läßt sich aber sofort abändern, wie dies beispielsweise Castelnuovo im 24. Bande der Atti di Torino, 1889, ausgeführt hat.

Ich erwähne das schon hier, weil die mehrdimensionale Ausdrucksweise und die damit parallel gehende Auffassungsweise für denjenigen, der sich einmal daran gewöhnt hat, in der That sehr bequem ist.

Wollen wir mit Hülfe des bezeichneten Grundgedankens doch gleich die Mannigfaltigkeit der Raumcurven m^{ter} Ordnung, die es gibt, für den einfachsten Fall abzählen. Dieser einfachste Fall ist derjenige, wo $m > 2p-2$. Wir wissen dann nämlich aus dem Riemann-Roch'schen Satze mit Sicherheit, daß jede einzelne G_m auf einer beliebigen Riemann'schen Fläche vom Geschlecht p, einen wohlbestimmten G_m^{m-p} aber keiner höheren linearen Schaar von Gruppen G_m angehört. Nun giebt es an sich auf der Riemann'schen Fläche ∞^m Gruppen G_m. Dieselben gruppiren sich jetzt also zu ∞^p linearen Schaaren G_m^{m-p}. Es ist nun die Frage, wie viele G_m^3 unter diesen ∞^p G_m^{m-p} enthalten sein mögen. Im Raume von $(m-p)$ Dimensionen ist ein dreifach ausgedehnter linearer Raum immer durch 4 Punkte festgelegt, aber den einzelnen dieser Punkte darf man nicht mit $(m-p)$ Constanten, sondern nur mit $(m-p-3)$ Constanten in Rechnung stellen, da er ja noch auf ∞^3 Weisen bewegt werden kann, ohne daſs sich der R_3 ändert. Solcherweise ergiebt sich als Zahl der R_3 im R_{m-p}: $\infty^{4(m-p-3)}$ und als Zahl der $G_m^{(3)}$ auf unserer Riemann'schen Fläche: $\infty^{p+4(m-p-3)} = \infty^{4m-3p-12}$. Eine jede dieser $G_m^{(3)}$ liefert nun für die projective Auffaſsung *eine* Raumcurve, oder, wenn wir die besondere Lage der Curve gegen das zu Grunde zu legende Coordinatensystem mit in Betracht ziehen wollen, sie liefert ∞^{15} individuell verschiedene Raumcurven (∞^{15} ist die Zahl der Collineationen, die es im R_3 giebt, oder, was daſselbe ist, die Zahl der Constanten, von welcher das allgemeine projective Coordinatensystem im R_3 abhängt).

Daher bekommen wir jetzt im Ganzen aus der als gegeben angesehenen Fläche vom Geschlechte p $\infty^{4m-3p+3}$ Raumcurven m^{ter} Ordnung. Aber nun beachte man, daſs die Zahl der unterschiedenen R. Flächen des Geschlechtes p ∞^{3p-3} ist ($3p-3$ ist die Zahl der Riemann'schen „Moduln").

So giebt's im Ganzen gerade ∞^{4m} Raumcurven m^{ter} Ordnung vom Geschlechte p, was zu beweisen war.

Man beachte zugleich, daſs dieselben hier (wo wir $m > 2p-2$ genommen hatten) alle eine einzige Familie bilden. Denn die ∞^{3p-3} Riemann'schen Flächen des Geschlechtes p bilden, wie wir wiſsen, ein Continuum, und die G_m, welche man auf der einzelnen dieser Flächen construiren kann, auch wieder. —

2. Neue Grundlegung der Riemann'schen Sätze von der Theorie der ebenen Curven aus.

Brill-Nöther beginnen in ihrer Arbeit explicite gar nicht mit den Riemann'schen Definitionen, sondern gleich mit einer ebenen Curve: $f(x_1 x_2 x_3)=0$, definiren das, was sie eine adjungirte Curve $\varphi(x_1, x_2 x_3)=0$ nennen (cf. p. 138, 223-225 der Wintervorlesung), und entwickeln nun für die Quotienten zweier adjungirter φ derselben Ordnung: $\varphi'_\mu(x_1 x_2 x_3) : \varphi''_\mu(x_1 x_2 x_3)$, sofern er eine „Function" auf $f=0$ vorstellt, auf rein algebraischem Wege Sätze, welche den Riemann'schen Theoremen von den algebraischen Function, die auf der durch $f=0$ definirten Riemann'schen Fläche existiren, genau parallel laufen. Insbesondere werden die Integrale $\int \varphi_{n-3}(x_1, x_2 x_3)\frac{|c x dx|}{\Sigma c_i df/dx_i}$ mit Riemann's überall endlichen Integralen übereinstimmen (immer vorausgesetzt, daſs die φ „adjungirt" sind). —

Auf eine kritische Würdigung dieses Ansatzes werden wir sogleich noch eingehen. Hier bemerken wir nur, was wir im Wintersemester schon gelegentlich berührten, daſs derselbe, sofern man die Uebereinstimmung mit den Riemann'schen Sätzen herauskehrt,*) ein neues Theorem enthält, dahin gehend, *daſs die algebraischen Functionen Riemann's auf $f=0$ mit denjenigen Functionen, die man durch Quotienten adjungirter φ definiren kann, direct identisch sind.* Quotienten nicht adjungirter φ aber werden auf $f=0$ solche algebraische Functionen geben, wie wir sie auf p 106, 110,-112 der Wintervorlesung als „gebundene" Functionen bezeichneten; vergl. hierzu insbesondere den Excurs auf p 286-289 daselbst.

---

*) die Brill-Nöther zwar überall supponiren aber nirgend's eigentlich ableiten.

Hier bietet sich naturgemäſs die Frage, wie [Mo. 23. 5. 92] denn die allgemeinen algebraischen Functionen auf einer Raumcurve durch rationale Functionen der Coordinaten dargestellt werden mögen? Man kann da an die Entwickelungen anknüpfen, welche *Nöther* in Bd. 8 der math. Annalen (1874) (in einer zweiten Abhandlung über das eindeutige Entsprechen mehrfach ausgedehnter algebraischer Gebilde) über die Darstellung der zur Curve gehörigen Integrale erster Gattung giebt. Der allgemeine Satz scheint folgender zu sein. Sei unsere Raumcurve der volle oder theilweise Schnitt von $\varphi'=0$, $\varphi''=0$. Wir haben dann möglicherweise singuläre Puncte auf der Raumcurve selbst, dann aber auch noch diejenigen Puncte als Singularitäten des Schnittes, in denen sich unsere Raumcurve mit dem etwaigen Restschnitte unserer beiden Flächen begegnet. Unter c', c'' zwei beliebige Raumpuncte verstanden, bilden wir uns jetzt die Functionaldeterminante $|c'c''\varphi'\varphi''|$. Eine Fläche $(x_1 x_2 x_3 x_4) = 0$ werden wir dann zur Raumcurve adjungirt nennen, wenn der Quotient $\frac{g}{|c'c''\varphi'\varphi''|}$ entlang der Curve in allen singulären Punkten des Schnittes endlich bleibt.

Und es wird dann wieder der Satz gelten, daß die Gesammtheit der auf der Raumcurve existirenden algebraischen Functionen sich mit der Gesammtheit der Quotienten adjungirter g deckt.

3. Wirkliche Inangriffnahme des Problems der Specialgruppen.

Was eine „Specialgruppe" ist, definirten wir bereits im vorigen Winter: eine solche Gruppe G_Q von Q Punkten des Gebildes, für welche σ linear unabhängige Differentiale erster Gattung verschwinden, wo $\sigma > 0$. Aus dem Riemann-Roch'schen Satze folgte damals, daß eine solche G_Q einer $Q - p + \sigma$ fach ausgedehnten linearen Schaar „aequivalenter" G_Q, also einer $G_Q^{Q-p+\sigma}$ angehört. Ferner lernten wir, daß mit jeder G_Q eine G_R so verbunden ist, daß

$Q + R = 2p - 2$, $2(\sigma - \tau) = R - Q$. Dieser Satz ist zum ersten Male bei Brill und Nöther allgemein ausgesprochen, wir nannten ihn darum den Brill-Nöther'schen Reciprocitätssatz. Eine Folge desselben ist, daß jede Specialfunction, d.h. jede Function, welche in den Punkten einer

G_Q mit $\sigma > 0$ unendlich wird, sich also Quotient zweier linearer Verbindungen der dw ausdrückt. Ferner entwickelen B. N. hier anschlieſsend, welches die Maximalwerthe von q und Q sind, die bei einer Specialschaar G_Q^q neben einander auftreten können. Aber mehr als dieses: sie geben für derartige Maximalschaaren auch Anzahlbestimmungen.

Wir werden das Alles durch Einführung mehrdimensionaler Ausdrucksweisen wieder sehr beleben. Wir setzen die homogenen Coordinaten $\varphi_1, \ldots \ldots \varphi_p$ eines R_{p-1} den p linear unabhängigen überallendlichen Differentialen $dw_1, \ldots dw_p$ der Riemann'schen Fläche proportional und erhalten in bekannter Weise die „Normalcurve C_{2p-2} der φ im R_{p-1}". Q Puncte, welche eine „Specialgruppe" mit dem „Ueberschuss σ" bilden, liegen auf σ linear unabhängigen „Ebenen" dieses Raumes, bilden also die Q Schnittpunkte der C_{2p-2} mit einem linearen $R_{p-1-\sigma}$. Jede Ebene, welche durch Q Puncte hindurchgeht, schneidet die C_{2p-2} in weiteren R Puncten, deren Ueberschuſs τ durch den Reciprocitätssatz geregelt wird; dieselben sind ihrerseits in einem $R_{p-1-\tau}$ enthalten. Erweitert man die G_Q zur linearen „Vollschaar" aequivalenter Punktgruppen $G^{Q-p+\sigma}$ und die G_R zur „Vollschaar" $G_R^{Q-p+\tau}$, so ist das Sachverhältniſs dies, daſs jede G_α der ersteren Schaar mit jeder G_R der anderen Schaar in einer Ebene liegt. Denn $Q - p + \sigma$ ist $= \tau - 1$, $Q - p + \tau = \sigma - 1$. Die Aufsuchung irgend welcher $G_\alpha^{R-p+\sigma}$ kann daraufhin entweder direct in Angriff genommen werden, oder so, daſs man die complementäre $G_R^{R-p+\tau}$ sucht.

So gefaſst hat, wie man sieht, das Problem der Specialgruppen die gröſste Aehnlichkeit mit dem Problem der vierfachen Secanten, wie wir es früher bei den gewöhnlichen Raumcurven studirten. *Diese ganze Analogie hervorgekehrt zu haben und dann mit Hülfe der geometrischen Abzählungsprincipien geradezu die Zahl bestimmter Specialgruppen festgelegt zu haben*, das ist jedenfalls ein besonderes Verdienst der Arbeit von Brill & Nöther. Uebrigens erscheinen die betreffenden Zahlen l. c. noch ohne Beweis; die Beweise hat Brill erst nachträglich in seinen bereits genannten Abhandlungen über das erweiterte Correspondenzprincip in Math. Ann. B. 31, 36 veröffentlicht. Man kann hier alle die Bemerkungen wiederholen, die wir früher beim Problem der einfachen Secanten machten. Mögen die Abzählungen im Allgemeinen richtig sein, wie man ja wohl nicht bezweifeln kann, obwohl ein genauerer Nachweis noch fehlt*), so giebt es jedenfalls *spezielle Fälle*, wo sie unrichtig werden, wo statt der abgezählten endlichen Anzahlen unendlich groſse vorhanden sind, kurzum, wo auſsergewöhnliche Specialgruppen auftreten. Beispiele für solche Möglichkeiten giebt beispielsweise die Arbeit von Kraus (Schüler von Brill) in Bd. 16 der math. Annalen, 1879. Offenbar wäre es äuſserst wichtig, alle in dieser Hinsicht möglichen Verhältniſse erschöpfend aufzählen zu können. —

---

*) nämlich im Sinne von I, p. 81-82

Ich habe diesem Referate über die Brill-Nöther'sche Arbeit nur noch wenige Bemerkungen hinzuzufügen.

Die Brill-Nöther'sche Arbeit vertritt in besonders typischer Weise den Grundsatz, den Clebsch seinen Schülern hinterlaſsen hat, und der je länger je mehr zu allgemeiner Anerkennung gelangt ist, daſs bei der Untersuchung der algebraischen Gebilde geometrische Construction u. functionentheoretische Begriffsbildung Hand in Hand gehen müſsen. Die Functionentheorie hat überall da den Vorrang, wo es sich um eine einzelne unabhängige Variable handelt; die Geometrie tritt ergänzend ein, sobald es gilt, mehrere Variable neben einander zu betrachten.

Die Functionentheorie giebt das eigentliche Fundament, die geometrische Betrachtung versieht uns mit einer gewiſsen Gewandheit, complicirte Verhältniſse von ihrer einfachsten Seite aufzufaſsen. Unter den Functionen, welche hierbei benutzt werden, stehen natürlich die algebraischen

Functionen und ihre Integrale voran; ich will hier aber doch beiläufig erwähnen, daſs immer mehr die Lösungen linearer Differentialgleichungen, bez. ihre Umkehr, die automorphen Functionen, in Betrachtung miteintreten. Und wenn ich meiner eigenen Auffaſsungsweise hier Ausdruck geben darf, so geht die dahin, daſs auf die Dauer die Verbindung von Geometrie und Functionentheorie nicht ausreicht, daſs also dritte Verbündete die *Zahlentheorie* hinzutreten muſs. Ich darf hier auf meine von Fricke bearbeiteten Vorlesungen über Modulfunctionen verweisen: die Art und Weise, wie dort die genannten drei Gebiete in einander greifen, scheint mir die allgemeine Richtung zu bezeichnen, in der sich jetzt diese Theile der modernen Mathematik entwickeln. In Uebereinstimmung mit den Tendenzen, die z.Z. in anderen Wiſsenschaften hervortreten, scheint es im Augenblicke auch bei der Mathematik mehr darauf anzukommen, die eine Zeit lang getrennten Disciplinen in ihrer Wechselbeziehung zur Geltung zu bringen, als jede einzelne derselben für sich weiter zu entwickeln. Doch kann ich mir denken, daſs in ein-zwei Jahrzehnten die Bewegung ihren Sinn wieder wechseln wird.

Das Vorstehende geht darauf hinaus, daſs ich das Brill-Nöthersche Programm nach seiner positiven Seite völlig acceptire und in meiner Weise weiter auszugestalten bemüht bin. Anders ist es mit der negativen Seite ihrer Tendenz, mit der Zurückweisung der auf Riemann zurückgehenden Begriffsbildungen. Ich erwähnte schon, daß Brill u. Nöther die *Definition* der algebraischen Functionen als derjenigen auf dem Gebilde eindeutigen Functionen, welche nirgendwo wesentlich singuläre Punkte haben, umgehen und statt dessen *Quotienten gleich hoher adjungirter $\varphi(x_1, x_2, x_3)$* als algebraische Functionen *bezeichnen*. Im Zusammenhange damit erscheint das p bei ihnen nur als die Anzahl gewisser adjungirter φ. Ich kann nicht läugnen, daß mir hier ein Rückschritt gegen Riemann's ursprüngliche Auffassung vorzuliegen scheint. Es ist ja gar nicht nöthig, daß wir als Grundlage der ganzen Theorie die Riemann'schen Existenzsätze einführen, immer ist es doch eine sehr wesentliche Sache, daß wir die algebraischen Functionen unabhängig von ihrem analytischen Ausdrucke charakterisiren, daß wir insbesondere die Bedeutung der Zahl p als einer Zahl verstehen, die den „Zusammenhang" des algebraischen Gebildes mißt. Indem Brill und Nöther und die Geometer, welche sich an dieselben anschließen, das p anders einführen, kommt bei ihnen der Satz von der Unveränderlichkeit des p gegenüber eindeutigen Transformationen als etwas Beiläufiges heraus, was merkwürdigerweise statt hat, nicht aber, wie bei Riemann als etwas durchaus Selbstverständliches.

Nach der anderen Seite hat der Ersatz der algebraischen Functionen durch die Quotienten gleich hoher Ordnung der ξ allerdings sein sehr Gutes gehabt. Vermöge deſselben ist es nämlich gelungen, die Theorie der algebraischen Functionen von der Curve auf mehrfach ausgedehnte Gebiete, wie Flächen etc., zu übertragen. Das hätte bei anderem Ausgangspuncte noch erst Untersuchungen über Functionen mehrerer complexer Variabler, über Zusammenhangsverhältniſse mehrfach ausgedehnter Mannigfaltigkeiten etc. verlangt, die noch nicht abgeschloſsen sind. Ich nenne hier kurz die Hauptpunkte dieser neueren Theorie:

1. Den Anfang macht auch hier Clebsch, der in den Comptes Rendus von 1868 bemerkte, daſs man bei einer algebraischen Fläche $f(x_1 x_2 x_3 x_4) = 0$, (die keine ausserordentlichen Singularitäten besitzen soll) überall endliche Doppelintegrale construiren kann, deren Anzahl p nothwendig bei eindeutiger Transformation constant bleibt. So haben wir denn wieder ein invariante Zahl, das „Flächengeschlecht". Nach der Ausdrucksweise von Brill und Nöther bezeichnet sie die Zahl der linear

unabhängigen Flächen $(n-4)^{\text{ter}}$ Ordnung, die zur gegebenen Fläche n^{ter} Ordnung „adjungirt" sind.

2. Hieran reihen sich dann vor allen Dingen die *Nöther'schen* Untersuchungen in Bd. 2 und 8 der Mathematischen Annalen (1869, 1874): „Ueber das eindeutige Entsprechen mehrfach ausgedehnter algebraischer Gebilde". Nöther zieht bei den Flächen etc. auch höhere Singularitäten in Betracht. Insbesondere aber zeigt er, daſs bei diesen Gebilden *mehrere* Geschlechtszahlen existiren. So bei den Flächen, d. h. den algebraischen Gebilden von 2 Dimensionen, deren zwei. Die erste, p, ist das Flächengeschlecht von Clebsch, die andere, die wir p' nennen wollen, mag etwa als die Zahl der beweglichen Schnittpunkte definirt werden, welche zwei adjungirte Flächen $(n-4)^{\text{ter}}$ Ordnung mit einander und mit $f=0$ gemein haben. Wir übergehen die vielfachen Ausführungen, welche Nöther in der Folge hier angeschloſsen hat und erwähnen nur, daſs er in den Berliner Sitzungsberichten von 1886 die Zahl der „Moduln", d. h. der durch eindeutige Transformation unzerstörbaren Constanten bestimmt, welche eine Fläche (p, p') besitzt; dieselbe ist gleich $10(p+1) - 2p'$.

3.) Aufgenommen worden diese Untersuchungen insbesondere von *Picard*. Man vergleiche deſsen zusammenfaſsende Arbeit in dem Journal des Mathematiques (4) t. V: „Sur la theorie des fonctions algébriques de 2 variables indépendantes" 1889.

4) Andererseits haben die Italiener einen Theil der in Betracht kommenden Probleme in geometrischer Form weiter geführt. Nehmen wir an, daſs eine Fläche oder ein sonstiges (in einem höheren Raume gelegenes) zweidimensionales algebraisches Gebilde sich eindeutig auf die Ebene abbilden laſse, so werden wir auf letzterer als Bild der ebenen Schnitte der Fläche ein lineares Curvensystem erhalten. An diesem Curvensysteme werden uns dann von dem hier gegebenen Standpunkte aus diejenigen Eigenschaften intereſsiren, welche bei beliebiger birationaler Transformation (Cremona-Transformation) der Ebene unverändert bleiben mögen. Auf derartige Fragen zielen in der That die Untersuchungen der italienischen Geometer Bertini, Caporali, Castelnuovo, Guccia, Jung, Martinetti ab. Andererseits giebt es Flächen, deren Theorie sich naturgemäſs an die Theorie der algebraischen Curven anschlieſst. Es sind dies insbesondere die geradlinigen Flächen. Ich darf wegen ihrer insbesondere auf die beiden Abhandlungen von Segre verweisen, die Bd. 30 und 34 der Annalen abgedruckt sind (1887, 1889: Recherches générales sur les courbes et surfaces

algébriques). –

Als zweites Moment, welches für die Entwickelung der modernen Curventheorie bestimmend gewesen ist, nannten wir bereits die Einführung der mehrdimensionalen Anschauungsweisen. [Di. 24.5.92.] Dieselbe hat sich in expliciter Form nur sehr allmählich vollzogen. Graſsmann hat ja schon 1844 in seiner „Ausdehnungslehre" den Standpunkt consequent entwickelt, das die gewöhnliche Geometrie nur ein Specialfall einer allgemeineren Disciplin, eben der mit beliebig vielen Dimensionen arbeitenden Ausdehnungslehre sei. Dann wieder hat Cayley in den 60.er Jahren immer wieder von mehrdimensionaler Betrachtung Gebrauch gemacht (cf. die Abhandlung „on Abstract Geometry" in den Philosophical Transactions von 1869). Auch wurde schon in den 60er Jahren als Gauss' und Riemann's Speculationen über die Hypothesen der Geometrie bekannt geworden waren, die methaphysische Frage des mehrdimensionalen Raumes in Mathematikerkreisen vielfach erörtert. Immer blieb die allgemeine Ansicht die, daſs es sich hier um eine mathematische Methode handele, die man gern bei Gelegenheit und insbesondere zum Zwecke eigener Orientirung benutzen könne, die man aber doch nicht breit in den Vordergrund der mathematischen Erörterung drängen solle. Ich darf hier beispielsweise auf Lie's und meine Arbeiten aus dem Anfange der 70er Jahre verweisen, insbesondere auf Note 4 im Anhange meines Erlanger Antrittsprogramms.

So ist es auch bei Brill und Nöther, um auf deren Arbeit zurückzukommen: die mehrdimensionale Denkweise ist den Verfaſsern offenbar geläufig[*], aber wird bei der Darstellung gefliſsentlich zurückgedrängt. Das ist erst Ende der 70er Jahre, man möchte sagen durch allgemeinen Consensus, anders geworden.

Damals erschien, um gleich insbesondere von Curven zu sprechen, in den Philosophical Transactions von 1878 die Abhandlung von Clifford: On the Claſsification of Loci, wo ganz das Programm einer Curventheorie aufgestellt wird, das wir noch gleich besprechen müſsen. Ferner in Bd. 16 der Mathematischen Annalen (1879) die schon genannte Arbeit von Kraus (Ueber auſsergewöhnliche Specialgruppen), wo zum ersten Male von der „Curve" C_{2p-2} der φ (in R_{p-1}) und von den hindurchgehenden „Flächen" die Rede ist; Weber hatte seine bezüglichen Resultate in Bd. 13 der Annalen (1877) noch rein analytisch ausgesprochen; das Gleiche thut auch noch *Nöther* in Annalen 17 (1880) in seinen auf den gleichen Gegenstand bezüglichen Untersuchungen. Ich könnte ferner meine eigenen Untersuchungen aus der damaligen Zeit nennen, in denen auch Curven in mehrdimensionalen Räumen als solche immerzu benutzt werden, so meine Arbeit in Ann. 15 (1879) über Transformation 11^{ter} Ordnung der elliptischen Functionen und in Ann. 17 (1880) über Normalformen der elliptischen Integrale. Alle diese Ansätze zusammenfaſsend schrieb dann *Veronese* 1881 in Ann. 19 seine groſse Abhandlung: Behandlung der projectiven Verhältniſse der Räume von verschiedenen Dimensionen durch das Princip des Projicirens und Schneidens. Indem hier die schwierigen functionentheoretischen Fragen zurückgedrängt sind und dafür das eigentlich geometrische Moment um so lebhafter in den Vordergrund gestellt ist, hat diese Arbeit vor allen anderen auf das geometrische Publicum gewirkt. Hier schlieſst dann auf italienischer Seite insbesondere *Segre* an. Unter den deutschen Geometern hat *Franz Meyer* die Führung mit seinem sogleich noch zu nennenden Buche über Apolarität und rationale Curven (1883; der wesentliche Inhalt ist mir übrigens vom Verf. schon im Sommer 1880 mitgetheilt worden).

---

[*] und wird z. B. von Brill, Ann. III, p. 459 (1871) explicite hingestellt.

Wir können gleich das *allgemeine Programm* [Fr. 27.5.92] skizziren, wie es sich unter Aufnahme der mehrdimensionalen Sprechweise, nunmehr für die Curven beliebig ausgedehnter Räume entwickelt.

Wir nehmen an, wir haben die allgemeinsten linearen Schaaren aequivalenter Punktgruppen G_Q^q auf einer Riemann'schen Fläche definirt; q ist dabei $= Q - p + \sigma$, nach dem Riemann-Roch'schen Satze, unter σ die Zahl der linear unabhängigen du oder φ verstanden, die in einer beliebigen G_Q der Schaar verschwinden. Diese G_Q^q bezeichnen wir zugleich bei dem angegebenen Werthe von q als *Vollschaar*; heben wir aus ihr eine niedere Mannigfaltigkeit von Punktgruppen durch lineare Bedingungen heraus, so entsteht die *Theilschaar* $G_Q^{q'}$, wo $q' < q$. Eine jede solche Schaar liefert uns dann eine Darstellung der Riemann'schen Fläche in Gestalt einer *Raumcurve*: das eine Mal als *Vollcurve* Q^{ter} Ordnung des Raumes von q Dimensionen, das andere Mal als *Theilcurve* Q^{ter} Ordnung des $R_{q'}$. Die Theilcurve entsteht aus der Vollcurve, indem man letztere „von einem $R_{q-q'-1}$ aus" auf den Raum R' „projicirt". Der $R_{q-q'-1}$ hat dabei einerseits mit der Vollcurve keinen Punkt gemein, es ist aber nicht auszuschlieſsen, daſs er sie in $1, 2, \ldots\ldots \rho$ Punkten „trifft"; die Projection auf $R_{q'}$ wird dann eine Curve der Ordnung $Q - \rho$ sein, welche selbst möglicherweise eine Vollcurve ist.

Jedenfalls sehen wir hier einen bestimmten Ansatz vor uns:

a) Aufzählung aller Vollcurven

b., Inbetrachtnahme aller Curven, die aus den Vollcurven durch irgendwelche Projection entstehen.

Hiermit verbindet sich die weitere Unterscheidung, ob für die zu Grunde liegende G^q_Q die Constante σ des Riemann-Roch'schen Satzes gleich 0 oder > 0 ist. Ist sie $= 0$, so haben wir eine „allgemeine" Curve, eine Generalcurve.

Alle Curven mit $p = 0$ oder $p = 1$ sind natürlich Generalcurven, ebenso alle Curven mit $Q > 2p - 2$. Ist $\sigma > 0$, so haben wir eine Specialcurve. Diese Voraussetzung trifft sicher zu, wenn $Q - p$ allein genommen 0 oder negativ ist, also für $Q < p + 1$. Es giebt eine oberste Specialcurve, das ist die C_{2p-2} des R_{p-1}, die wir wiederholt erhielten, indem wir die homogenen Coordinaten $\varphi_1 : \varphi_2 : \ldots : \varphi_p$ eines Punktes des R_{p-1} mit den überall endlichen Differentialen $dw_1, dw_2, \ldots dw_p$ der Fläche proportional setzen. Aus ihr derivieren alle anderen Specialcurven durch Projection. Es ist dies nur eine andere Ausdrucksweise für den schon im Winter erwähnten Satz, dass jede Specialfunction auf der Riemann'schen Fläche der Quotient zweier linearer Verbindungen der dw ist. Die Aufzählung aller Specialcurven ist natürlich nichts Anderes als das vorhin erwähnte Problem der Aufzählung aller auf einer Riemann'schen Fläche existirenden Schaaren von Specialgruppen. Es handelt sich dabei, wie wir auch vorhin sagten, darum, einen linearen Raum (den wir hier R_ν nennen wollen) auf alle Weisen so gegen die C_{2p-2} des R_{p-1} zu legen, daſs er 1, 2, ... eventuel möglichst viele Punkte mit der C_{2p-2} gemein hat. Von diesem Raume aus projiciren wir dann die Curve auf den $R_{p-\nu-2}$.

Indem wir diese neuen Sätze aufnehmen, modificiren wir unsere Disposition folgendermaſsen. Wir werden

ad a) diejenigen Vollcurven (Normalcurven, Normcurven) untersuchen, welche allgemeinen Character haben, d.h. $\sigma = 0$ aufweisen. Ferner dann

ad b) insbesondere die Curve C_{2p-2} der φ im R_{p-1}, der wir ein ganz besonderes Intereſse zuwenden. Endlich handeln wir

ad c), von den verschiedenen Lagen, welche lineare R_ν gegen die Curven ad a) und insbesondere die C_{2p-2} ad b) haben können, und von der Uebersicht, welche man von hieraus über das Problem erhält, auch die Theilcurven aufzählen, welche in irgendwelchem gegebenen Raume enthalten sein mögen.*)

---

*) Vergl. hierzu die Entwickelungen in Kap. III, 2 der Vorlesungen über elliptische

[Mo. 30. 5. 92]

a. Von den Normalcurven mit $\sigma = 0$.

Wir handeln insonderheit von den Curven mit $p=0$ und $p=1$.

1) $p=0$. Eine Riemann'sche Fläche mit $p=0$ hat bekanntlich keinen „Modul". Andererseits existirt auf einer solchen Fläche für jeden Zahlenwerth von Q nur eine einzige g_Q^Q. Daher erhalten wir also im R_Q bei Zugrundelegung der projectiven Auffassung nur eine einzige Normalcurve des Geschlechtes 0: die C_Q des R_Q. Diese Normalcurve ist immer ebenso als einfachste Curve ihres Raumes zu betrachten, wie der Kegelschnitt in der Ebene oder die Raumcurve dritter Ordnung. So wird denn diese Curve bei zahlreichen Gelegenheiten als ein Hülfsmittel benutzt. Wir haben z. B. vorigen Winter in der Vorlesung über Algebra gesehen, wie sie mitsammt ihrer developpablen Fläche dienlich ist, die Multiplicitäts- und Realitätsverhältnisse der Wurzeln einer Gleichung Q^{ten} Grades $f_Q(\lambda)=0$ zu erläutern. Nicht minder nützlich ist sie in der Invariantentheorie der binären Formen Q^{ter} Ordnung, $f_Q(\lambda_1, \lambda_2)$ worüber man insbesondere das Buch von Franz Meyer

---

Modulfunctionen. Vergl. ferner die Arbeiten von Segre und den anderen neueren Italienern, bei denen die gleiche Art des Ansatzes durchweg zu Grunde liegt.

„Ueber Apolarität und rationale Curven" (1883) vergleichen möge. Man legt dabei die Curve am einfachsten immer in folgender Parameterdarstellung zu Grunde:

$$x_1 : x_2 \dots\dots\dots\dots x_{\alpha+1} = \lambda^{\alpha} : \lambda^{\alpha-1} : \dots\dots\dots\dots \lambda^{1} : 1.$$

Von eben dieser Parameterstellung aus wird man dann auch leicht alle die Fragen beantworten, die man im Sinne unserer allgemeinen Auffassung an die Theorie unserer Curven stellen wird. Ohne selbst die Sache völlig durchgedacht zu haben, will ich hier in dieser Hinsicht folgende Behauptungen aufstellen:

1.) Für unsere Curve coincidiren die algebraischen ganzen Formen I und die rationalen ganzen Formen g ohne Weiteres; die Curve ist also eine „Elementare", die $x_1, x_2, \dots\dots x_{\alpha+1}$ bilden auf ihr ein „volles Formsystem". – Indem $p = 0$, ist von den Nullpunkten einer I, und also einer g, keiner durch die übrigen mitbestimmt.

2.) Von hier aus erfährt man sofort die Zahl der Flächen μ^{ter} Ordnung, welche durch die Curve gehen; insbesondere findet man als Zahl der linear unabhängigen durch die Curve gehenden Flächen 2^{ten} Grades $\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}$.

3.) Diese $\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}$ Flächen zweiten Grades lassen sich am einfachsten aufstellen, indem man sämmtliche Determinanten der Matrix:

$$\left| \begin{matrix} x_1 & x_2 & \dots\dots\dots\dots & x_{\alpha} \\ x_2 & x_3 & \dots\dots\dots\dots & x_{\alpha+1} \end{matrix} \right|$$

gleich Null setzt.

4) Besagte Flächen zweiten Grades reichen aus, um die Curve rein darzustellen: sie fixiren den „Rationalitätsbereich" der Curve. Aber mehr als dieses, sie geben auch den „Integritätsbereich", indem jede durch die Curve hindurchgehende Fläche F_μ die Darstellung gestattet:

$$F_\mu = M' F_2' + M'' F_2'' + \dots\dots\dots\dots ,$$

unter M', M'', ... Polynome $(\mu - 2)^{\text{ten}}$ Grades verstanden.

5) Endlich sollte es nicht schwer sein, und zwar durch Anwendung des gewöhnlichen (Chasles'schen) Correspondenzprincips, eine allgemeine Theorie der linearen Räume R_ν zu entwerfen, welche unserer Curve in irgendwelcher Zahl ρ von Schnittpunkten begegnen. Das gäbe dann die Grundlage für das Studium aller Theilcurven, welche aus unserer Normcurve durch Projection abgeleitet werden können.

Ob die hiermit bezeichneten Fragen nicht alle in der Literatur erledigt vorliegen? Sicher wird das implicite in vielfacher Hinsicht der Fall sein. Aber die Untersuchungen von *Veronese*, von *Segre*, sowie auch von *Emil Weyr*, die man da zunächst heranziehen wird, sind für den Vergleich nicht günstig. Besagte Autoren folgen nämlich bei der Redaction ihrer Arbeiten der bei den Geometern vielfach geltenden Regel, nicht bestimmte Fragestellungen von vornherein ins Auge zu fassen und zur Erledigung zu bringen, sondern mehr dem freien Impulse der Phantasie folgend bald nach dieser bald nach jener Seite einzelne, besonders elegant scheinende Sätze zu entwickeln.

Da ist denn, wenn man nicht viele Zeit auf das Studium der betreffenden Abhandlungen verwenden will, schwer zu sehen, wie viel eigentlich erreicht ist. Einen anderen Character haben die auf rationale Curven des R_2 und R_3 bezüglichen neueren Arbeiten von Brill, Franz Meyer, Reye, W. Stahl (ich verweise etwa auf den Aufsatz des Letzteren im eben erschienenen Annalenhefte 40, I). Dieselben betreffen eine Frage, welche nach einer etwas anderen Richtung liegt, als wir seitlang in Betracht zogen, nämlich die Frage der projectiven Erzeugung der rationalen Curven. Man wird eine ebene rationale Curve erhalten, wenn man von zwei niederen rationalen Curven beginnt, diese projectiv aufeinander bezieht und die Tangenten projectiv zusammengeordneter Punkte der beiden Curven zum Schnitt bringt. Auf wie viele Weisen läßt sich eine vorgelegte ebene rationale Curve solcherweise erzeugen?

Bei Raumcurven wird man zum entsprechenden Zwecke die Osculationsebenen dreier projectiv aufeinander bezogener niederer rationaler Curven zum Schnitt zu bringen haben. –

2) $p = 1$. Hier handelt es sich um C_Q des R_{Q-1}, für welche die doppelt überdeckte Gerade (mit 4 Verzweigungspunkten), die ebene Curve dritter Ordnung erster Species die einfachsten Beispiele sind. Wegen der allgemeinen Theorie darf ich auf meine eigene Darstellung in t. 13 der Sächsischen Abhandlungen (1885), bez. auf die Entwickelungen in dem baldigst erscheinenden Bd. II der elliptischen Modulfunctionen verweisen (Abschn. V, Kap. 1 und 2); man vergl. auch *Castelnuovo* (Geometria sulle curve ellittiche) sowie *Segre* (Corrispondenze univoche sulle curve ellittiche), beide in t. 24 der Atti di Torino (1888-89). Natürlich handelt es sich bei dieser Theorie nicht eigentlich um neue analytische Ansätze, sondern mehr um geometrische Deutung der von den elliptischen Functionen her ohnehin bekannten Entwickelungen. Indem wir mit w das überall endliche elliptische Integral bezeichnen und unter σ die Sigmafunction verstehen, werden wir die Curve C_Q in der Weise darstellen, dass wir schreiben:

$$\varrho x_i = \sigma(w - a_{i1}) \cdot \sigma(w - a_{i2}) \cdots\cdots \sigma(w - a_{iQ})$$

$$[i = 1, 2, \cdots\cdots Q],$$

wobei $\sum a_{1k} = \sum a_{2k} = \cdots\cdots \sum a_{Qk}$ zu nehmen sein wird (damit der Quotient zweier beliebiger x eine doppelperiodiſche Function von w sei).

Hier bezeichnet der gemeinsame Werth der Summen Σa_{1k}, Σa_{2k}, ... die einzelne $G_{\alpha}^{\alpha-1}$, von der wir bei der Darstellung der Curve ausgehen. Aber es ist doch nicht so, als ob diese Curve wechselte, wenn man den genannten Summenwerth und damit die $G_{\alpha}^{\alpha-1}$ abändert. Vielmehr kann man diese Abänderung immer dadurch compensiren, daſs man w um eine entsprechende Gröſse vermehrt (oder vermindert): die Curve bleibt dabei ungeändert erhalten und erleidet nur, der Änderung des w entsprechend, eine eindeutige Transformation in sich selbst. *Jede einzelne Riemann'sche Fläche $p = 1$ liefert hiernach für jeden $R_{\alpha-1}$, projective Auffassung vorausgesetzt, nur eine einzige C_{α}.* Die C_{α} hat daher auch nur eine einzige absolute Invariante, dem einen „Modul" entsprechend, welche die Fläche $p = 1$ der Riemann'schen Theorie zufolge besitzt.

Im einfachsten Falle, der C_2 des R_1, d.h. der doppelt überdeckten Geraden mit 4 Verzweigungspunkten, kann man das Vorhandensein eines solchen Moduls ohne Weiteres erkennen: der Modul wird uns durch das *Doppelverhältniſs* der 4 Verzweigungen, oder irgendeine Function dieses Doppelverhältniſses vorgestellt. Aber man kann die C_3 des R_2 leicht auf eine solche

C_2 des R_1 zurückführen, indem man sie von einem ihrer Punkte aus auf einen R_1 projicirt. Ebenso die C_4 des R_3 durch Projection von einer ihrer Secanten aus, etc. Alle die so bei gegebener Curve entstehenden C_2 des R_1 müſsen unserem allgemeinen Ansatze zufolge, weil sie derselben Riemann'schen Fläche entsprechen, projectiv sein. Es folgt so erstlich der Salmon'sche Satz: Das Doppelverhältniſs der 4 Tangenten, welche von einem beliebigen Punkte einer Curve dritter Ordnung an die Curve gelegt werden können, hat von der Wahl des Punktes unabhängigen Werth, mit Verallgemeinerung auf Raumcurven 4ter Ordnung etc, ferner aber erkennen wir in diesem Doppelverhältniſse den einen für die Curve charakteristischen Modul.

Ich sage ferner, daſs auch bei den elliptischen C_Q die $\mathfrak{g}$ mit den $\underline{\mathrm{I}}$ übereinstimmen. Insbesondere findet man $\frac{Q(Q-3)}{2}$ Flächen zweiter Ordnung, welche durch die Curve gehen. Dieselben genügen, für $Q > 3$, um die Curve rein darzustellen. Ob sie auch genügen, um den Integritätsbereich der Curve festzulegen?

Die Theorie der linearen Räume, welche der Curve mehrfach begegnen, erhält ihr besonderes Interesse dadurch, daſs sich aus denselben merkwürdige Configurationen zusammensetzen laſsen. Vergl. die „singulären" Coordinatenpolyeder meiner eben genannten

Abhandlung, sowie eine Arbeit von *Schönflies* in Ann. 35 (1889). Es handelt sich da wesentlich um Sätze, die in die Theorie der Theilung und der Transformation der elliptischen Functionen gehören. Ausführlich werden wir auf dieselben erst in dem späteren Kapitel eingehen können, in welchem wir allgemein von der Theilung der Abelschen Functionen handeln werden.

b. Von der Normalcurve der φ, bei $p > 1$.

Indem wir uns zu höheren Werthen von p wenden, wollen wir ausschlieſslich die wichtigste dann vorhandene Normalcurve in Betracht ziehen, jene C_{2p-2} des R_{p-1}, welche definirt wird, indem wir die p homogenen Coordinaten des letzteren, die wir $\varphi_1, \varphi_2, \ldots\ldots \varphi_p$ nennen, mit den p überall endlichen Differentialen $dw_1, dw_2, \ldots\ldots dw_p$ der Fläche proportional setzen. Hierbei kommen wesentlich die beiden schon öfter genannten Abhandlungen: von *Weber* in Ann. 13 (1877: Ueber gewiſse in der Theorie der Abel'schen Functionen auftretende Ausnahmefälle) und von *Nöther* in Ann. 17 (1880: Invariante Darstellung der algebraischen Functionen) in Betracht.

Wir constatiren erstlich, daſs unsere Curve dem R_{p-1} „eigentlich" angehört, d.h. daſs sie nicht in einem linearen Raume von noch niederer Dimensionenzahl enthalten sein kann. Denn das würde bedeuten, daſs zwischen den $dw_1, \ldots\ldots dw_p$ eine lineare Relation bestünde, was bekanntermaſsen unmöglich ist. Nun kann eine Curve, welche dem R_{p-1} eigentlich angehört, wie man leicht sieht, keine kleinere Ordnung haben als $p-1$, und ist die Ordnung $= p-1$, so hat man nothwendig mit der bez. Normalcurve des Falles $p=0$ zu thun. Daher kann bei unserer C_{2p-2} nur einer von 2 Fällen eintreten: entweder sie ist eine einfach überdeckte Curve oder sie reducirt sich im besonderen Falle auf eine doppelt überdeckte rationale Normalcurve C_{p-1}. Da man die Punkte der letzteren durch einen Parameter λ rational darstellen kann, so handelt es sich bei der doppelt überdeckten Curve nothwendig um eine hyperelliptische Irrationalität.

Und in der That kommt man auch rückwärts, wenn man bei einem hyperelliptischen Gebilde $s = \sqrt{f_{2p+2}(\lambda)}$ die zugehörige Normalcurve der φ aufsucht, zu einer (doppelt überdeckten) rationalen C_{p-1}. Denn man hat in diesem Falle etwa:

$$w_1 = \int \frac{\lambda^{p-1}\, d\lambda}{\sqrt{f(\lambda)}}\,; \quad w_2 = \int \frac{\lambda^{p-2}\, d\lambda}{\sqrt{f(\lambda)}}\,, \;\ldots\ldots\; w_p = \int \frac{\lambda^{0} . d\lambda}{\sqrt{f(\lambda)}}\,,$$

daher $\varphi_1 : \varphi_2 : \ldots\ldots \varphi_p = dw_1 : \ldots\ldots\ldots dw_p = \lambda^{p-1} : \lambda^{p-2} : \ldots : 1$

Das sind ohne Weiteres die Formeln für eine rationale C_{p-1}, und daſs diese doppelt überdeckt ist, entspricht dem

Umstande, daſs jedem Werthe von λ zwei Punkte des hyperelliptischen Gebildes zugehören. Den $2p+2$ Wurzeln von $f(\lambda) = 0$ entsprechen dabei ebensoviele auf der doppelt überdeckten C_{p-1} gelegene „Scheitel" (oder denn „Verzweigungspunkte").

Man hat den solcherweise geschilderten hyperelliptischen Fall früher gewöhnlich als einen eigentlichen Ausnahmefall bei allgemeinen Untersuchungen über die Curve der $\underline{\varphi}$ bei Seite gelaſsen. Wir werden in der Folge vielfach genau umgekehrt verfahren: wir werden uns vor Augen halten, daſs dieser „Ausnahmefall" sich doch continuirlich in die Reihe der übrigen Fälle einordnen muſs, und das wir also den allgemeinen Fall in der Weise in Untersuchung ziehen können, daſs wir die Verhältniſse zunächst einmal im hyperelliptischen Falle untersuchen und von da dann durch Continuität weiter gehen.

Die besondere Wichtigkeit der Normalcurve der φ ruht nun darin, daſs jeder einzelnen Riemann'schen Fläche, wie allen denen, die aus ihr durch eindeutige Transformation entstehen mögen, im projectiven Sinne nur *eine* Normalcurve der φ zugehört. Eben deſshalb finden die Verhältniſse auf der Riemann'schen Fläche an der Curve der φ, wie es Nöther in der Ueberschrift seines Aufsatzes ausdrückt, eine „invariante Darstellung."

Wir verfolgen dies hier zunächst an der Frage der

$3p-3$ „Moduln" der Riemann'schen Fläche, die sich hier als $3p-3$ absolute Invarianten der Curve der φ werden darstellen müſsen, est ist dies für die Folge geradezu die einfachste Definition der besagten Moduln: wir bezeichnen als Moduln eines algebraischen Gebildes die $(3p-3)$ absoluten Invarianten der zugehörigen Curven der φ (wobei wir uns noch alle Freiheit laſsen werden, diese Invarianten, je nachdem es paſst, rational oder irrational oder auch transcendent zu wählen). Zunächst aber wird es sich darum handeln, bei unserer Curve überhaupt einmal das Vorhandensein von $(3p-3)$ absoluten Invarianten nachzuweisen. Wir leisten dies, indem wir einen Ansatz von Weierstraſs, der aus deſsen Vorlesungen und gelegentlichen indirecten Mittheilungen bekannt ist,*) unter Zuhülfenahme geometrischer und Riemann'scher Methoden entwickeln.

Weierstraſs geht davon aus, daſs es auf einer Curve des R_{p-1} eine endliche Zahl von Stellen geben wird, in denen ein R_{p-2} p fach schneiden kann: entsprechend den „Wendepunkten" der ebenen Curven oder den „Hyperosculationspunkten" einer gewöhn.

---

*) vergl. z. B. Brill-Nöther in Annalen 7, p. 302-304, Schottky in Crelle 83 (1877) p. 317-319, etc.

lichen Raumcurve.*) Wir wollen die Zahl dieser „Weierstraß"-Punkte, welche unsere C_{2p-2} im Allgemeinen darbietet, hier um so lieber vorab abzählen, als wir dabei eine gute Gelegenheit haben, das Cayley-Brill'sche Correspondenzprincip anzuwenden. Ich denke mir zu dem Zwecke aus der

C_{2p-2} des R_{p-1}

durch Projection von irgend einem Curvenpunkte aus auf den nächst niederen Raum eine

C_{2p-3} des R_{p-2}

gemacht, aus diesem durch die entsprechende Operation eine

C_{2p-4} des R_{p-3}

u.s.w. fort, bis wir zu einer

C_{p+2} des R_3

und endlich zu einer

C_{p+1} des R_2

kommen. Letztere hat dann als Curve vom Geschlechte p notwendig $\frac{p \cdot p-3}{2}$ Doppelpunkte und also, nach der zweiten Plückerschen Formel, $9 \cdot p-3$ Wendepunkte. Von hier aus beginnend bestimme ich nun zunächst, vermöge des Correspondenzprincips, die Zahl der Hyperosculationspuncte der C_{p+2} des R_3, dann die Zahl der Stellen der C_{p+3} des R_4, in denen ein R_3 fünffach schneidet, etc. Folgendermaſsen:

---

*) Unendlich groß kann die Zahl dieser Punkte nicht werden, wenn man nicht will, daß die Curve schon einem Raume von geringerer Dimensionenzahl angehört; vergl. Nöther in Crelle 92.

In einem Puncte x der C_{p+2} des R_3 construiren wir die Osculationsebene, welche 3-fach in x und also einfach noch in $p-1$ Puncten y schneidet, die wir dem Puncte x entsprechend setzen. Wie viele x gehören umgekehrt zu einem gegebenen y? Wir haben uns nur zu überlegen, daſs ein jedes solche x für die ebene Curve C_{p+1}, als welche sich unsere C_{p+2} vom Puncte y aus projicirt, einen Wendepunct vorstellt. Es giebt also bei gegebenen y die vorhin bestimmte Zahl $9 \cdot p-3$ von x. Fassen wir zusammen, so haben wir jetzt eine Correspondenz $(\overset{\alpha}{x}, \overset{\beta}{y})$ mit

$$\alpha = 9 \cdot p-3, \; \beta = p+1 \text{ und der „Werthigkeit" } 3.$$

Das giebt $\alpha+\beta+2\gamma p = 16p-4$ Coincidenzen. Aber diese Coincidenzen sind nichts Anderes als die gesuchten Hyperosculationspuncte unserer C_{p+2}. Deren Zahl ist also eben $16p-4$.

Von hier gehen wir nun durch ein ganz entsprechendes Verfahren zu den merkwürdigen Stellen der C_{p+3} des R_4, deren Zahl sich zu $25p-5$ ergiebt, ... endlich zu den Weierstraſs-Puncten der C_{2p-2} des R_{p-1}. Als Zahl der letzteren folgt dann p^3-p, w. z. b. w. —

Wir nehmen jetzt einen dieser Weierstraſs-Puncte und construiren in ihm den p fach schneidenden R_{p-2}, deſsen

Gleichung $v_\varphi = 0$ sei. Derselbe schneidet unsere Curve in weiteren $p-2$ Puncten, durch die wir einen weiteren linearen Raum R_{p-2} hindurchlegen, der durch $u_\varphi = 0$ gegeben sein soll. *Die Function*

$$\lambda = u_\varphi : v_\varphi$$

nimmt dann auf unserer Curve jeden Werth in p Puncten an, den Werth ∞ insbesondere in dem einen ausgezeichneten (Weierstraſs-) Puncte, von dem wir ausgingen. Daher werden wir als Bild unserer C_{2p-2} über der λ Ebene eine p blättrige Riemann'sche Fläche haben, deren sämmtliche Blätter bei $\lambda = \infty$ im Cyclus zusammenhängen. Es ist das ein $(p-1)$ facher Verzweigungspunct. In Folge deſsen hat unsere Fläche, die doch das Geschlecht p aufweisen muſs, noch $3p-1$ weitere Verzweigungspuncte. Mögen wir einen derselben nach $\lambda = 0$, einen anderen nach $\lambda = 1$ legen, was immer gelingen wird, da wir statt unseres λ gern irgend ein $a\lambda + b$ der Betrachtung zu Grunde legen können.

Die Argumente der $3p-3$ noch übrigen Verzweigungspuncte geben uns dann $3p-3$ für unser Gebilde charakteristische Constante, d.h. eine besondere Bestimmungsweise der $3p-3$ von uns gesuchten Riemann'schen Moduln. Anders ausgesprochen: Unter den R_{p-2} des „Büschels" $u_\varphi - \lambda v_\varphi$ giebt es auſser $v_\varphi = 0$ noch $3p-1$, welche unsere C_{2p-2} berühren". Die 3p hiernach im Büschel vorhandenen „Berührungs-R_{p-2}" bilden miteinander 3p-3 unabhängige Doppelverhältnisse und diese 3p-3 Doppelverhältnisse dürfen wir als Riemann'sche Moduln des Gebildes ansehen.

In dieser Form entwickelt läßt unsere [Di. 31.5.92. (IIte Vorlesung)] Betrachtung noch der Einwände eine ganze Menge zu. Wir werden diese Einwände jetzt beseitigen, und zugleich sehen, wie sich die Verhältnisse in allen möglichen Fällen gestalten, wenn wir die p-blättrige Riemann'sche Fläche genauer betrachten und zugleich immer die Riemann'schen Existenzsätze vor Augen halten. (In ganz entsprechender Weise wird man überhaupt oft die Entwickelungen der Geometer ergänzen können; wir werden dafür bald ein weiteres Beispiel kennen lernen).

Construiren wir uns zunächst eine Riemann'sche Fläche der gerade beschriebenen Beschaffenheit. Wir werden p Blätter übereinander legen und nun vom Punkte ∞ aus einen Verzweigungsschnitt auslaufen lassen, der die Blätter 1 und 2 verbindet, dann einen anderen, der 2 und 3 verbindet, ... endlich einen, der p-1 und p verknüpft: die Endpunkte dieser Verzweigungsschnitte können ganz beliebig genommen werden. Wir haben dann um den Punkt herum den gewollten cyclischen Zusammenhang sämmtlicher Blätter. Es bleiben uns dann noch weitere 2p Verzweigungspunkte einzufügen, also, wenn wir uns dieselben zu je 2 durch einen Verzweigungschnitt verbunden denken wollen, p Verzweigungsschnitte. Diese können wir ganz beliebig in die p Blätter einordnen, beispielsweise so, daſs das p^{te} Blatt an ihnen nicht betheiligt ist. Das Gesagte genügt, um zu sehen, daſs die bezeichneten p blättrigen Flächen wirklich existiren, daſs sie von 3p-3 wesentlichen Parametern abhängen, und insofern zu ihnen vermöge des Riemann'schen Existenzsatzes doch wirkliche algebraische Functionen und also auch Normalcurven der φ gehören: *daſs man von der allgemeinen Curve der φ aus vermöge der Weierstraſs'schen Construction wirklich zu p-blättrigen Flächen der beschriebenen Eigenschaft hingelangt.*

Aber zugleich folgt, daſs man in speciellen Fällen von der Normalcurve der φ aus alle die *besonderen* Flächen wird erhalten können, die aus unserer p blättrigen Fläche durch Zusammenrücken der Verzweigungspunkte hervorgehen. Wenn zwei Verzweigungspunkte zusammenrücken, so können sie sich entweder addiren ($\overline{12}$ und $\overline{23}$ geben einen doppelten Verzweigungspunkt) oder subtrahiren ($\overline{12}$ und noch ein $\overline{12}$ heben sich gegenseitig auf. Im letzteren Falle wird man nun zwei wesentlich verschiedene Fälle unterscheiden müſsen: Entweder die Riemann'sche Fläche bleibt auch nach Zusammenrücken der beiden Verzweigungspunkte ein zusammenhänges Ganzes. Dann hat sich weiter nichts geändert, als daſs ihr Geschlecht um 1 gesunken ist, und man hat dann eben einen Gränzfall vom Geschlechte $p-1$ vor Augen. Oder aber die Riemann'sche Fläche zerfällt in zwei Flächen. Hat die eine derselben das Geschlecht p_1, die andere das Geschlecht p_2, so ist $p_1 + p_2 = p$. Diese letztere Möglichkeit wird nun insbesondere bei uns hervortreten, wenn wir das p^{te} Blatt unserer Fläche gar nicht bei den $2p$ Verzweigungspunkten, die wir hinterher einfügten, betheiligen und nun den von ∞ auslaufenden Verzweigungsschnitt, durch den allein jetzt das p^{te} Blatt an die übrigen angeheftet ist, auf den Punkt ∞ zusammenziehen.

In der That trennt sich dann das p^{te} Blatt von der übrigen Fläche ab, u. da ein einzelnes Blatt für sich genommen das Geschlecht 0 hat, so werden wir daneben noch eine $(p-1)$ blättrige Fläche behalten, die das Geschlecht p besitzt. Die $(p-1)$ Blätter dieser Fläche hängen dann bei ∞ wieder im Cyclus zusammen und sind übrigens durch $3p-2$ einfache Verzweigungspunkte verbunden; die Fläche hängt also von $3p-4$ wesentlichen Constanten ab. Auch diese Fläche wird bei der Weierstraſs-

Construction resultiren können, und zwar muſs das bei ∞^{3p-4} der ∞^{3p-3} zu unterscheidenden Normalcurven der φ der Fall sein. Welche Modification die C_{2p-2} in diesem Falle, als Curve betrachtet, der allgemeinen C_{2p-2} gegenüber aufweisen muſs, bliebe zu untersuchen. Wir werden nun weitergehend auch das $(p-1)^{\text{te}}$ Blatt abschnüren können, dann das $(p-2)^{\text{te}}$ Blatt u.s.w. fort, bis zuletzt nur noch 2 Blätter übrig bleiben. Wir haben also da eine ganze Reihe von Flächen vom Geschlechte p, der Reihe nach mit $3p-1$, $3p-2$, ... $2p+1$ im Endlichen gelegenen Verzweigungspunkten und also $3p-3$, $3p-4$, ... $2p-1$ wesentlichen Constanten. Die zweiblättrige Fläche bezeichnet natürlich den *hyperelliptischen* Fall. *Aber alle diese Flächen sind neben einander in Betracht zu ziehen, wenn man eine erschöpfende Theorie der Weierſtraſsischen Normalform haben will.*

Weierſtraſs hat in der That einen bemerkenswerthen Ansatz gegeben, um für jeden einzelnen dieser Fälle eine zugehörige analytische Darstellung zu finden. Da unsere Flächen bei ∞ nur einen einzelnen Punkt aufweisen, so werden die zur Fläche gehörigen „ganzen Functionen" solche Functionen sein, die nur an einer bestimmten Stelle des algebraischen Gebildes ∞ werden. In Folge deſsen ist es nicht schwer, die verschiedenen ganzen Functionen die auf unserer Fläche existiren, bez. die Möglichkeiten, die betreffs dieser ganzen Functionen vorliegen, einzeln aufzuzählen (Weierstraſs' Lückensatz; vergl. *Nöther* in Crelle Bd. 97, 1884 oder auch meine erste Vorlesung über Abel'sche Functionen (vom Sommer (1888)). Daraufhin kann man die Relationen, welche zwischen diesen ganzen Functionen bestehen mögen, mit unbestimmten Constanten ansetzen; vergl. wegen $p=3$ die Erläuterungen bei *Schottky* in Crelle 83, 1877 (p. 317-319), wegen $p=4$ die Diſsertation von *Valentin*, 1879. Hat man alle Gleichungen gegeneinander abgeglichen, so sieht man, daſs in denselben wirklich $3p-3$, $3p-4$, ... wesentliche Constante auftreten.

Wir können das hier leider nicht weiter verfolgen, sondern wenden uns zur directen Betrachtung der $C_{2,p-2}$ zurück, indem wir mit *Weber* und *Nöther* fragen, wie viele Flächen 2^{ten}, 3^{ten}, ... Grades durch die Curve gehen mögen? Wir erhalten in dieser Hinsicht zunächst mit Weber, eine untere Gränze, indem wir etwa folgende Ueberlegung, an dem Beispiele der Flächen zweiter Ordnung, anstellen.

Ganze rationale Verbindungen der $\varphi_1, \dots \varphi_p$ sind zunächst in der Zahl $\frac{p.p+1}{2}$ vorhanden. Mögen nun k_2 derselben längs unserer $C_{2,p-2}$ verschwinden, so haben wir von den übrigen her auf unserer Curve $(\frac{p.p+1}{2} - k_2)$ „Formen φ_2". Aber diese φ_2 sind zugleich „algebraische" ganze Formen auf der Curve, d.h. „Formen T_2". Und die Zahl der verschiedenen T_2 ergiebt sich sofort nach dem Riemann-Roch'schen Satze. Denn da eine T_2 in $4p-4$ Curvenpunkten verschwindet, und diese Zahl $> 2p-2$ ist, so gilt hier der Riemann-Roch'sche Satz ohne Zusatzglied. Hiernach ist die Zahl der $T_2 = 4p-4-p+1 = 3p-3$. Somit folgt $\frac{p(p+1)}{2} - k_2 \leqq 3p-3$, d.h. die Zahl k_2 der durch unsere Curve C_{2p-2} gehenden Flächen zweiten Grades:

$$k_2 \geqq \frac{p-2\cdot p-3}{2}$$

Analog kommt für die Zahl k_3 der durch die Curve gehenden Flächen dritten Grades:

$$k_3 \geqq \frac{(p-3)(p^2+6p-10)}{6}, \text{ etc. etc.}$$

Diese Formeln genügen bereits, wie Weber bemerkt, um über die Normalcurve der φ in den beiden niedersten Fällen $p=4,5$ Auskunft zu geben [bei $p=2,3$ ist überhaupt kein Problem zu lösen, weil die analytische Darstellung einerseits der doppelt überdeckten Geraden mit 6 Verzweigungspunkten, andererseits der Curve 4ter Ordnung in der Ebene von vorneherein auf der Hand liegt]. Wir haben erstlich bei $p=4$:

eine C_6 des R_3, durch welche sicher eine Fläche 2ten Grades und fünf Flächen 3ten Grades gehen. Da unmöglich mehr als eine Fläche 2ten Grades durch die Curve gehen kann, sie wäre ja sonst nicht von der 6ten Ordnung, so ist unsere Curve nothwendig Schnittcurve einer Fläche 2ten und einer Fläche 3ten Grades. Und da umgekehrt die Schnittcurve von F_2 und F_3 im allgemeinen Falle dem Geschlechte 4 angehört, wie wir früher lernten, und die Ebenen des Raumes richtig die zugehörigen φ vorstellen, so ist unsere C_6 des R_3 eben die allgemeine Schnittcurve von F_2 und F_3.

Analog erkennen wir, daſs die C_8 des R_4, die wir bei $p=5$ zu betrachten haben, und durch die mindestens drei Flächen zweiter Ordnung hindurchgehen können, geradezu der allgemeine Schnitt dreier Flächen zweiten Grades des R_4 ist.

Für gröſsere p haben diese schönen Theoreme leider kein Analogon, indem z. B. bei $p=6$ k_2 bereits $\geqq 6$ wird, sechs Flächen zweiten Grades aber im R_5 im Allgemeinen sicher keine Curve gemein haben, also die Flächen zweiten Grades, welche durch die Curve gehen, nicht unabhängig von einander angenommen werden können.

So weit die Weber'sche Arbeit (was die hier [Do. 2. 6. 92] vorliegende Frage angeht). Und nun hat Nöther l.c. die gefundenen Resultate wesentlich verschärft. Wir hatten für die Zahlen $k_2, k_3 \ldots\ldots$ der hindurchgehenden Flächen 2ten, 3ten Grades nur erst *Ungleichungen* gefunden und blos bei den Beispielen gesehen, dass bei ihnen das Gleichheitszeichen herrscht: Nöther beweist, dass allgemein das Gleichheitszeichen zu nehmen ist, dass also bei unserer C_{2p-2}, wie wir es im vorigen Wintersemester schon angaben, überhaupt die φ und T übereinstimmen (dass die φ für unsere Curve ein volles Formensystem bilden). Nur der hyperelliptische Fall bildet hierbei eine Ausnahme.

Wir werden uns hier darauf beschränken, den bezüglichen Nachweis für die Formen 2ten Grades zu bringen. Wir wollen nämlich eine φ_2 construiren, welche genau so viele willkürliche Constante enthält, wie die allgemeine T_2, nämlich $3p-3$, und gewiss nicht längs der Curve C_{2p-2} identisch verschwindet, es sei denn, dass man alle ihre Coëfficienten $= 0$ nimmt. Zu dem Zwecke suchen wir uns auf C_{2p-2} $(p-2)$ Punkte $\alpha_1, \alpha_2 \ldots\ldots \alpha_{p-2}$ in „allgemeiner" Lage. Durch selbige werden dann nur zwei Ebenen gehen, die wir $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$ nennen wollen. Ferner wird von den Schnittpunkten, die $\varphi_1 - \lambda \varphi_2 = 0$ mit der C_{2p-2} gemein hat, keiner ausser den α festliegen können; wir haben also p bewegliche Schnittpunkte $\beta_1, \beta_2, \ldots\ldots \beta_p$.

Durch das einzelne System dieser β geht dann nach dem Brill-Nöther'schen Reciprocitätssatze gerade eine Ebene $(\tau = 1)$. Endlich sei $\varphi_3 = 0$ eine Ebene, welche nicht durch die Punkte α_1, α_{p-2} hindurchgeht. Wir bilden dann folgenden Ausdruck mit $3p-3$ Constanten:

$$\gamma_2 = \varphi_1 \cdot \sum_1^p a_k \varphi_k + \varphi_2 \cdot \sum_2^p b_k \varphi_k + \varphi_3 \cdot \sum_3^p c_k \varphi_k$$

und behaupten, daſs er nicht anders längs der Curve verschwinden kann, als wenn alle a_k, b_k, c_k einzeln gleich 0 sind. In der That: soll er zunächst in den Punkten $\alpha = 0$ sein, so folgt, daſs für diese $\sum_3^p c_k \varphi_k$ verschwinden muſs. Aber es gehen, wie wir wiſsen, durch die Punkte α keine anderen Ebenen, als $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$ [bez. deren lineare Combinationen]. Daher muſs $\sum_3 c_k \varphi_k$ identisch Null sein, die c_k müſsen verschwinden. Wir beschränken uns also jetzt auf den Ansatz $\gamma_2 = \varphi_1 \cdot \sum_1^p a_k \varphi_k + \varphi_2 \cdot \sum_2^p b_k \varphi_k$ und verlangen, daſs dieser längs der Curve verschwinde. Da richten wir dann unsere Aufmerksamkeit auf die Punkte β, für welche $\varphi_1 - \lambda \varphi_2 = 0$ war. Soll γ_2 längs der Curve verschwinden, so wird für dieselben Punkte β $\lambda \cdot \sum_1^p a_k \varphi_k + \sum_2^p b_k \varphi_k = 0$ sein müſsen. Aber wir bemerkten schon, daſs durch die Punkte β keine andere Ebene hindurchgeht, als eben $\varphi_1 - \lambda \varphi_2 = 0$. Daher dann eben $\lambda \cdot \sum_1^p a_k \varphi_k + \sum_2^p b_k \varphi_k$ identisch Null sein muſs (welchen Werth auch λ besitzen mag). Das heiſst aber, daſs alle a_k, b_k einzeln verschwinden, w. z. b. w.

Analog verfährt Nöther für die Formen 3ten Grades, etc. etc. Leider aber ist mit dem so erhaltenen schönen Satze noch nicht so viel gewonnen, als man wohl möchte. Wenn wir wiſsen, daſs immer genau $\frac{p-2 \cdot p-3}{2}$ Flächen 2ten Grades durch die Curve gehen, so möchte man glauben, daſs dieselben, sobald sie in ausreichender Zahl vorhanden sind, d.h. für $p \geqq 5$, die Curve immer in gleicher Weise bestimmen. Nun ist die Sache so, daſs diese $\frac{p-2 \cdot p-3}{2}$ Flächen zweiten Grades allerdings in vielen Fällen genügen, um die C_{2p-2} völlig festzulegen [vergl. *Nöther* in Ann. 26, 1885: Ueber Normalcurven bei $p = 5, 6, 7$.] daſs sie aber gelegentlich auch ein mehrfach ausgedehntes Gebiet gemein haben! Vergl. *Kraus* in Ann. 16, 1879: Ueber auſsergewöhnliche Specialgruppen. –

Wir wenden uns nunmehr zur genaueren Betrachtung eben des *Problems der Specialgruppen*. Wir erhalten, wie wir wiſsen, auf unserer C_{2p-2} alle möglichen Schaaren von Specialgruppen, wenn wir lineare Räume R_ν beliebiger Dimension so gegen die Curve orientiren, daſs sie mit ihr 1, 2, 3 ..... Punkte gemein haben, und nun die Curve mit denjenigen „Ebenen" $\sum_1^p c_k \varphi_k = 0$ schneiden, welche durch den einzelnen R_ν hindurchgehen.

Wir werden, um da klar zu sehen, am besten die beiden Beispiele $p = 3$ und $p = 4$ vorweg nehmen:

a) $p = 3$. Ebene Curve der 4. Ordnung.

Von Räumen R_ν kommen hier nur die R_0, d.h. die

die Punkte der Ebene, und also die durch diese hindurchgehenden Strahlbüschel in Betracht. Der Punkt liegt entweder nicht auf der Curve, oder er liegt auf derselben.

Da haben wir nun auf der Curve

erstlich die $G_4^{(2)}$, welche von allen Graden der Ebene ausgeschnitten wird

zweitens $\infty^2 G_4^{(1)}$, ausgeschnitten von den Strahlbüscheln, welche von einem Punkte auslaufen, der nicht der C_4 angehört,

endlich $\infty^1 G_3^{(1)}$, ausgeschnitten von den Strahlbüscheln, deren Mittelpunkt auf der Curve liegt.

Das sind die sämmtlichen auf C_4 existirenden Schaaren von Specialgruppen. b) $p = 4$. Raumcurve 6ter Ordnung des R_3, Schnitt einer Fläche 2. und einer Fläche 3. Grades.

Betreffs dem R_0 des Raumes sind wieder nur die zwei Fallunterscheidungen zu machen, wie soeben.

Bei der R_1 aber, d.h. den geraden Linien, werden wir 4 Fälle auseinanderhalten müſsen: der R_1 schneidet die C_6 entweder in 0 Punkten, oder in 1, 2, 3. Vierfaches Schneiden ist nicht möglich. Denn eine 4. fache Secante würde der F_2, welche durch die Curve geht, wie auch der F_3 ganz angehören müſsen und also einen

Theil der Schnittcurve vorstellen, die wir doch als irreducibel voraus setzen. Die dreifachen Secanten aber haben eine sehr einfache Bedeutung: sie stellen die gradlinigen Erzeugenden der F_2 vor und vertheilen sich dementsprechend auf 2 Schaaren.

Daraufhin haben wir nun folgende linearen Schaaren von Specialgruppen:

1) Die $G_6^{(3)}$, welche von allen Ebenen des R_3 ausgeschnitten wird.

2) $\infty^3 G_6^{(2)}$ und $\infty^1 G_5^{(2)}$, ausgeschnitten von den Ebenen, welche durch einen festen Punkt durchlaufen.

3) $\infty^4 G_6^{(1)}$, $\infty^3 G_5^{(1)}$, $\infty^2 G_4^{(1)}$, ausgeschnitten von den Ebenen, welche durch eine feste Gerade laufen, die der C_6 bez. in 0, 1, 2 Punkten begegnet,

4) nicht etwa $2\,\infty^1$ sondern nur $2\,G_3^{(1)}$, den beiden Schaaren dreifacher Secanten entsprechend.

In der That liefert jede Gerade einer Schaar, wenn man durch sie schneidende Ebenen hindurchlegt, in den beweglichen Schnittpunkten dieser Ebenen dieselbe $G_3^{(1)}$, wie jede andere Gerade derselben Schaar; es handelt sich bei der $G_3^{(1)}$ einfach um die Gesammtheit der Punkttripel, welche auf der C_6, von den Geraden der anderen Schaar ausgeschnitten werden.

Diese Verhältniſse ad 4) und die Reciprocität zwischen den beiden $G_3^{(1)}$ sind für uns besonders bemerkenswerth.

Was uns hier die bekannte Theorie der geradlinigen Erzeugenden der Flächen 2ten Grades an die Hand gegeben hat, wird uns höher hinauf der Brill-Nöther'sche Reciprocitätssatz leisten, wobei dann die Frage nahe liegt, ob man die bez. Entwickelungen nicht allgemein in Zusammenhang bringen kann mit der Lehre von den linearen Räumen, welche auf den $\frac{p-2\cdot p-3}{2}$ Flächen zweiten Grades liegen, die durch die C_{2p-2} hindurchgehen?

Erwähnen wir doch noch der besonderen Möglichkeit, daſs die F_2, auf welcher unsere C_6 liegt, in einen *Kegel* ausartet. Auf einem Kegel fallen die beiden Schaaren geradliniger Erzeugender, welche die allgemeine F_2 besitzt, in eine zusammen. So also auf der besonderen C_6 auch die beiden im Allgemeinen unterschiedenen $G_3^{(1)}$. Wichtiger wird, wie wir vorab bemerken, die Ausnahmestellung dieser besonderen C_6 erst später werden, wenn wir uns mit den dreifachen Tangentenebenen der Curve beschäftigen werden, die bei ihr (in der Theorie der Abel'schen Functionen) eine ganz entsprechende Rolle spielen, wie die 28 Doppeltangentenebenen der C_6. Wenn aber die C_6 insbesondere auf einem

Kegel 2ten Grades liegt, dann hat sie alle die ∞^1 Tangentenebenen des Kegels zu 3 fachen Tangentenebenen, dann ist also die Zahl der letzteren unendlich gross. Wie ist dieser Specialfall in die allgemeine Theorie einzuordnen?

Das wird eine der Fragen sein, mit denen wir uns weiterhin zu beschäftigen haben; einstweilen verweise ich auf *Weber*, wie auch auf *Kraus* l.c., wo gerade das hier bezeichnete Vorkommniss vom allgemeinen Standpunkte aus discutirt wird.

[Fr. 3. 6. 92.] Zum Zwecke des allgemeinen Studiums der Specialgruppen beginnen wir damit, die Formeln des Brill-Nöther'schen Reciprocitätssatzes heranzuziehen:

$$m + n = 2p - 2, \quad m - n = 2(\tau - \sigma).$$

Dieselben besagen, dass sich die Specialpunktgruppen auf der C_{2p-2} immer folgendermassen gruppiren: Man hat nebeneinander immer

eine $g_m^{\tau-1}$ und eine $g_n^{\sigma-1}$;

und jede G_m der ersten Schaar ist mit jeder G_n der zweiten Schaar zusammen der volle Schnitt der C_{2p-2} mit einer Ebene. Hinterher mögen wir dann die C_{2p-2} entweder von einer der G_n aus auf eine C_m des $R_{\tau-1}$ oder von einer der G_m aus auf eine C_n des $R_{\sigma-1}$ projiciren.

Die Frage ist nun die, wie viele solcher „complementärer" Paare $G_m^{\tau-1}$, $G_n^{\sigma-1}$ bei gegebenen (den Reciprocitätsbedingungen genügenden) Zahlen m, n, σ, τ vorhanden sein mögen? In dieser Hinsicht machen wir den folgenden Ansatz, der allerdings nur auf Plausibilität Anspruch machen kann, weil er Bedingungen als unabhängig zählt, die möglicherweise nicht unabhängig sind: wir werden erst später durch eine Hülfsbetrachtung zeigen, daſs das Resultat wenigstens bei $\tau = 2$ „im Allgemeinen" richtig ist, aber für specielle Gebilde auch hier versagt.

Wir bemerken erstlich, daſs σ „Ebenen" im R_{p-1} einen linearen $R_{p-1-\sigma}$ gemein haben, der innerhalb des R_{p-1} von $\sigma(p-\sigma)$ Constanten abhängt. Wir bemerken ferner, daſs es $(\sigma-1)$ Bedingungen ausmacht, wenn wir verlangen, ein solcher $R_{p-\sigma-1}$ solle unserer C_{2p-2} in einem Punkte begegnen. Aber wir wünschen, daſs er ihr in m Punkten begegne, und da nehmen wir eben an, daſs das die m-fache Zahl von Bedingungen sei, also $m(\sigma-1)$ Bedingungen. So bleiben von den Constanten des $R_{p-\sigma-1}$ noch $\sigma(p-\sigma) - m(\sigma-1)$ willkürlich.

Aber immer $\infty^{\tau-1}$ dieser $R_{p-\sigma-1}$ gehören zu einer $G_m^{\tau-1}$ zusammen. Bezeichnen wir also die Zahl der $G_m^{\tau-1}$, die es auf unserer C_{2p-2} giebt, mit ∞^{ρ}, so folgt

$$\underline{\rho = \sigma(p-\sigma) - m(\sigma-1) - (\tau-1)}$$

oder, wenn wir σ vermöge der Reciprocitätsgleichungen durch τ und m ausdrücken:

$$\varrho = p + \tau (m + 1 - p - \tau). -$$

Hätten wir nach gleicher Methode die Zahl der $G_n^{(\sigma-1)}$ abgezählt, so wären wir zu derselben Zahl gekommen. −

Die so erhaltene Formel für ϱ benutzen wir nun mit Brill und Nöther zur Discussion der Gränzfälle, d.h. derjenigen Fälle, wo bei gegebenem τ das m möglichst klein, bei gegebenem m das τ möglichst groß ist. Das Kriterium wird dabei sein, daß eine jede Zahlencombination möglich sein wird, bei welcher ϱ nicht negativ ausfällt. Die Gränzfälle werden dann durch einen möglichst kleinen Werth von ϱ charakterisirt sein. Um diesen zu finden, setzen wir

$$p = \pi \cdot \tau + h \quad (\text{wo } h < \tau, \text{ aber } \geqq 0 \text{ sein soll})$$

Die Formel für ϱ lautet dann:

$$\varrho = h + \tau (\pi + m + 1 - p - \tau),$$

worauf der Gränzfall $\varrho = h$ eintreten wird, sobald man

$$m = p + \tau - \pi - 1$$

nimmt. Zugleich ergiebt sich $\sigma = \pi$, so daß wir die Bezeichnung π wieder einsparen können und folgendes Resultat haben:

Um bei gegebenem τ den Gränzfall zu finden, setze man:

$$p = \sigma \cdot \tau + h \quad (0 \leqq h < \tau),$$

wir haben dann ∞^h Gränzschaaren $G^{\tau-1}_{p+\tau-\sigma-1}$.

Also wenn wir zunächst $\tau=2$ nehmen, so werden wir unterscheiden, ob $p=2\tau$ oder $=2\tau+1$ gesetzt werden kann. Im ersten Falle finden wir auf der C_{2p-2} eine endliche Zahl von Gränzschaaren $G^1_{p/2+1}$, d.h. eine endliche Zahl von Möglichkeiten, die C_{2p-2} auf eine $(p/2+1)$ fach überdeckte Riemann'sche Fläche zu beziehen. Im zweiten Falle giebt es $\infty^1 G^1_{\frac{p+1}{2}+1}$. Beide Resultate sind schon von Riemann selbst angegeben (Abel'sche Functionen №. 13.).

Oder, wenn wir $\tau=3$ setzen, so würde es sich darum handeln, die niedersten „ebenen" Curven zu finden, auf welche man unsere C_{2p-2} beziehen kann. Wir müſsen da unterscheiden, ob $p=3\sigma$ oder $3\sigma+1$ oder $3\sigma+2$ gesetzt werden kann. Im ersteren Falle erhalten wir eine endliche Zahl ebener $C_{\frac{2p}{3}+3}$; im zweiten Falle ∞^1 ebene $C_{\frac{2p+1}{3}+2}$, im dritten ∞^2 ebene $C_{\frac{2p+2}{3}+2}$, etc. etc.

Wir werden jetzt sehen, ob wir wenigstens das Resultat für $\tau=2$ mit Hülfe des Riemann'schen Existenzsatzes verificiren können. Ich will dabei der Einfachheit halber an der Annahme $p=2\tau$ festhalten.

Die Abzählung zeigt, daſs eine Riemann'sche Fläche mit $(p/2+1)$ Blättern, wenn sie vom Geschlechte p sein soll, $3p$ Verzweigungspunkte, also $3p-3$ wesentliche Constante besitzt, d.h. ebensoviele, wie die allgemeine C_{2p-2} selbst.

Da ist nun eine doppelte Möglichkeit: Entweder liefert „im Allgemeinen" jede C_{2p-2} eine solche Riemann'sche Fläche, das ist natürlich, was wir wünschen, oder es geben die besonderen C_{2p-2}, welche $(p/_2+1)$ blättrige Flächen liefern, deren immer gleich ∞ viele. Diese zweite Möglichkeit können wir nun an gegenwärtiger Stelle noch nicht ausschliessen, es wird aber weiter unten durch ein Beispiel geschehen. Dagegen erfahren wir durch die Betrachtung der Riemann'schen Fläche selbst, wie unsere „Normalfläche" im besonderen Falle degeneriren kann. Man kann doch Riemann'sche Flächen auch mit geringerer Blätterzahl construiren, die gleichfalls das Geschlecht p haben: R.-Flächen mit $p/_2-1$, $p/_2-2$ ...... 2 Blättern mit $3p-2$, $3p-4$, ... $2p+2$ Verzweigungspunkten. Wieder wollen wir annehmen, dass eine C_{2p-2}, welche eine solche Riemann'sche Fläche ergiebt, nicht nothwendig gleich ∞ viele Flächen derselben Art liefert. Wir erfahren dann, dass diese besonderen C_{p-2} nur von $3p-5$, $3p-7$, ... $2p-1$ Parametern abhängen, also durch $2, 4$ .... $p-2$ Bedingungen gegenüber den allgemeinen specialisirt sind.

[Fr. 3.6.92
II^te Vorlesung.] Nachdem wir so untersucht haben, welche Gränzschaaren $G_m^{\tau-1}$ auf der allgemeinen C_{2p-2} überhaupt vorkommen, wird es sich darum handeln, die Anzahl der einzelnen $G_m^{\tau-1}$ genau festzulegen. Ist $\varrho = h = 0$, treten also die $G_m^{\tau-1}$ nur einzeln,

licher Zahl auf, so ist ohne Weiteres klar, was damit gemeint ist. Ist aber $\rho = h > 0$, so wird man die $G_m^{\tau-1}$, um ein bestimmtes Problem zu haben, noch erst h „linearen" Bedingungen zu unterwerfen haben, also etwa der, dass bestimmte $h + \tau - 1$ Punkte der Curve in einer G_m der Schaar vereinigt sein sollen.

Die so formulirte Frage ist nun im Falle $\tau = h$ ebenfalls schon von Brill und Nöther in ihrer Arbeit beantwortet worden: Brill hat dann neuerdings, in Ann. 36 (1890), gezeigt, wie man durch wiederholte Anwendung des Cayley-Brill'schen Correspondenzprincips zu dem bezeichneten Resultate hin kommt; vergl. auch den jüngst erschienenen Aufsatz von Zeuthen in Ann. 40, I. Das Resultat ist bei geradem $p = 2\sigma$ durch die Formel $\frac{1}{\sigma}\binom{2\sigma}{\sigma-1}$ gegeben, bei ungeradem $p = 2\sigma+1$ durch $\frac{2}{\sigma}\binom{2\sigma+1}{\sigma-1}$ Hiernach giebt es beispielsweise bei $p = 4, 6, 8$ die Zahl der $G_3^{(1)}, G_4^{(1)}, G_5^{(1)}$ gleich 2, 5, 14. Die gleichen Zahlen 5, 14 findet man für die $G_4^{(1)}$ bei $p = 5$ und die $G_5^{(1)}$ bei $p = 7$.

Höhere Werthe von τ sind dann von Castelnuovo in Betracht gezogen worden (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei 1889 II, p. 130). Castelnuovo beschränkt sich dabei auf den Fall $\rho = h = 0$, also $p = \sigma \cdot \tau$, und erhält für diesen Fall die allgemeine Formel (die für $\tau = 2$ mit der von Brill angegebenen stimmt):

$$\frac{1!\,2!\ldots\ldots(\sigma-1)!\;1!\,2!\ldots\ldots(\tau-1)!}{1!\,2!\ldots\ldots(\sigma+\tau-1)!}\cdot p!$$

Hiernach haben wir beispielsweise für $p = 12$

einmal der Zerlegung $12 = 6 . 2 .$ entsprechend 132 $G^{(1}_7$,

dann aber Zerlegung $12 = 4 . 3$ entsprechend 462 G^2_{10},

es ist also auf 132 Weisen möglich, die im R_{11} gelegene C_{22} der φ des Falles $p = 12$ auf eine 7. fach überdeckte Gerade zu projiciren, und auf 462 Weisen, sie auf eine ebene Curve 10ter Ordnung zu projiciren!

Aber es ist nicht nur dieses Resultat, es ist insbesondere die Methode von Castelnuovo, die ich besprechen will. In der That ist dieselbe für uns besonders instructiv, weil sie alle die modernen Schluſsweisen, über welche z. Z. die Curvenlehre verfügt, in wechselnder Verbindung benutzt; wir werden auſserdem in der Lage sein, Castelnuovos Ueberlegung gerade da, wo er dieselbe als unsicher bezeichnet, durch den Riemann'schen Existenzsatz auf sichere Basis zu stellen.

Castelnuovo beginnt damit, die Aufsuchung unserer $G^{\tau-1}_m$ durch ein aequivalentes Problem zu ersetzen, welches sich nicht mehr auf die C_{2p-2} der φ, im R_{p-1}, sondern auf eine beliebige der ∞^p Normalcurven C_{m+p} bezieht, welche man zu unserem algebraischen Gebilde vom Geschlechte p im R_m construiren kann. Insofern $m = p + \tau - \sigma - 1$, hat eine solche C_{m+p}, wie man sofort abzählt, eine endliche Zahl p. fach schneidender $R_{m-\tau}$. Da ist nun klar, daſs die $\infty^{\tau-1}$ R_{m-1}, welche durch einen solchen $R_{m-\tau}$ hindurchlaufen, aus unserer C_{m+p} gerade eine $G_m^{\tau-1}$ ausschneiden. Andererseits aber ist auch klar, daſs jede $G_m^{\tau-1}$ unseres Gebildes solcherweise aus der C_{m+p} ausgeschnitten werden kann. Sei nämlich G_m eine einzelne Punctgruppe einer solchen $G_m^{\tau-1}$, G'_m eine andere. Wir können dann durch G_m im R_m gerade einen R_{m-1} legen, der noch in einer Gruppe von p Puncten, G_p, schneidet. Nun sind G_m und G'_m aequivalent. Aber $G_m + G_p$ ist der Schnitt unserer C_{m+p} mit einem R_{m-1}, und alle Punctgruppen, die mit einem solchen Schnitt „aequivalent" sind, bilden selbst wieder einen derartigen Schnitt: das ist der Begriff der *Normalcurve*. Also: G_p liegt mit jeder der $\infty^{\tau-1}$ Gruppen G'_m in einem R_{m-1}, oder G_p ist der Schnitt unserer C_{m+p} mit einem $R_{m-\tau}$, w. z. b. w.

So hat denn Castelnuovo das Problem vor sich: *die endliche Zahl der $R_{m-\tau}$ zu bestimmen, welche die C_{m+p} des R_m p-fach schneiden.* Und hier nun benutzt er das „Princip der speciellen Lage". Er nimmt nämlich an, und das ist der hypothetische Theil eines Beweisganges, den wir erst sogleich stützen müſsen, es sei möglich, die C_{m+p} so ausarten zu laſsen, daſs sie in eine C_m (d.h. eine rationale Normalcurve des R_m) und p Secanten derselben (C_1, welche der C_m jede zweimal begegnen) zerfällt! Für diese ausgeartete Curve wird nun die Abzählung zu machen sein.

Aber augenscheinlich zerfällt für die ausgeartete Curve die Aufsuchung der p-mal schneidenden $R_{m-\tau}$ in eine Reihe getrennter Probleme. Ein solcher $R_{m-\tau}$ wird nämlich die C_m vielleicht ν mal treffen und dann noch $p-\nu$ der C_1 jede einmal zu schneiden haben. Da kann dann erstlich $\nu = 0, 1, \dots p$ genommen werden, zweitens können die $p-\nu$ in Betracht kommenden C_1 unter den p C_1 beliebig herausgegriffen werden. Alle die Lösungen der so unterschiedenen Probleme werden wir hinterher zusammenzuaddiren haben.

Bei der Ausführung gestaltet sich das noch viel einfacher, als man zunächst erwartet. Es zeigt sich nämlich, daſs die Zahl der Lösungen aller dieser Theilprobleme, sofern wir den einen Fall $\nu = 0$ ausnehmen, schlechthin $= 0$ ist: es giebt *keinen* $R_{m-\tau}$, der eine rationale C_m in ν Punkten träfe und dabei $p-\nu$ beliebig gelegene (also nicht durch einen der ν Punkte laufende) Secanten der C_m schnitte, $\nu \geqq 1$ genommen. Die $\infty^{\tau-1}$ durch einen solchen $R_{m-\tau}$ laufenden R_{m-1} würden nämlich aus C_m eine $g^{\tau-1}_{m-\nu}$ ausschneiden, welche $(p-\nu)$ Punktepaare der C_m je in denselben $g_{m-\nu}$ vereinigt enthielte, was bei allgemeiner Lage der Punktepaare nicht möglich ist.

So bleibt denn, daſs wir abzählen, *wie viele $R_{m-\tau}$ es giebt, welche irgend p gegebene C_1 treffen*, also eine Fragestellung, bei der die C_m völlig zur Seite tritt, die mit der

Lehre von den algebraischen Curven nichts mehr zu thun hat, und die in die Elemente der mehrdimensionalen Geometrie gehört. Und diese Fragestellung erledigt man wieder durch das Princip der speciellen Lage. Schubert hat zuerst für derartige Fragen in Ann. 26 den erforderlichen Ansatz gegeben (1885: Die n. dimensionalen Verallgemeinerungen der fundamentalen Anzahlen unseres Raumes) und dann Castelnuovo den Gegenstand mit viel gröſserer Allgemeinheit behandelt (eben auch 1889 in den Rendiconti dei Lincei, p. 71 ff). Die mitgetheilte Zahl der $g_m^{\tau-1}$, bez. der hier gesuchten $R_{m-\tau}$ ist nur ein ganz specieller Fall der da entwickelten Theorie.

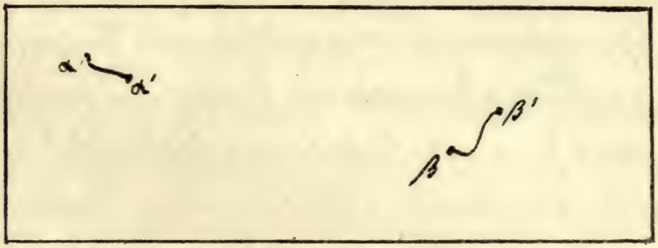
Wir begleiten dieses Referat noch mit folgenden Bemerkungen:

1) Die Behandlung der zerfallenden Curve beruhigt uns über einen Punkt, der oben unentschieden blieb. Wir hatten damals gewünscht an einem Beispiele zu sehen, daſs die Existenz einer Gränzschaar $g_m^{\tau-1}$ in dem Falle, wo unserer allgemeinen Abzählung nach nur eine endliche Zahl von $g_m^{\tau-1}$ auftreten soll, nicht nothwendig die Existenz unendlich vieler $g_m^{\tau-1}$ nach sich ziehen möchte.

Ein solches Beispiel wird uns jetzt durch die zerfallende C_{m+p} geliefert. Denn man kann den p linearen C_1 sofort eine solche Lage geben, in der sie gewiſs nicht von unendlich vielen $R_{m-\tau}$ gemeinsam geschnitten werden.

2) Der Riemann'sche Existenzsatz gestattet uns in der That, die allgemeine C_{m+p} des R_m in die zerfallende Curve übergehen zu laſsen. Man projicirt die C_{m+p} irgend wie auf einen R_1, wobei eine $(m+p)$ blättrige Riemann'sche Fläche mit $(2m-2+4p)$ Verzweigungen entstehen wird. Durch diese Fläche wird rückwärts die C_{m+p}, projectiv zu reden, eindeutig bestimmt sein. Denn die C_{m+p} ist doch nur ein geometrisches Gegenbild derjenigen G_{m+p} unserer Fläche, welche mit irgend $(m+p)$ übereinander gelagerten Punkten der Fläche aequivalent sind.

Wir werden also die möglichen Ausartungen der C_{m+p} studieren, indem wir die Riemann'sche Fläche auf alle Weisen ausarten laſsen, und dieses bewerkstelligen wir auf Grund des Riemann'schen Existenzsatzes einfach so, daſs wir die Verzweigungspunkte der Fläche irgendwie sich vereinigen laſsen. Man denke sich jetzt die $(p+m)$ blättrige Fläche folgendermaſsen aufgebaut. Man nehme zunächst eine m blättrige Fläche mit $(2m-2)$ Verzweigungspunkten, also vom Geschlechte 0. Ueber diese schichte man p einfache Blätter und befestige dann ein jedes derselben an die m. blättrige Fläche mit Hülfe von vier Verzweigungspunkten $\alpha, \alpha'; \beta, \beta'$; die so in dem einzelnen Blatte gelegen sein mögen (und so durch Verzweigungsschnitte verbunden sein mögen), wie nachstehende Figur aufweist:



Zu der so construirten Riemann'schen Fläche gehört dann gewiss eine C_{m+p}. Und nun lasse man die Fläche so ausarten, dass die Verzweigungspunkte α und α', wie β und β', in jedem der p einzelnen Blätter zusammenrücken. Dann zerfällt die Fläche wieder in den anfänglichen m blättrigen Bestandtheil und in die p einzelnen Blätter, wobei ersterer $2p$, jedes der letzteren 2 „Narben" tragen wird, d.h. Stellen, an denen ursprünglich der Zusammenhang mit den anderen Blättern statt hatte, der nun durch das Zusammenrücken der Verzweigungspunkte aufgelöst ist. Das heisst aber geradezu, dass die zugehörige C_{m+p} in $C_{m+p}\cdot C_1$ zerfällt und dass diese C_1 *Secanten* der C_m sind: die Stellen, in denen die C_m den verschiedenen C_1, einer jeden zweimal, begegnet, sind eben das Gegenbild der „Narben", die wir auf den verschiedenen Bestandtheilen der zerfallenden Riemann'schen Fläche vorfanden.

Soweit unser Bericht über die C_{2p-2} der φ. Derselbe schloſs sich an die voraufgehende Erläuterung der *allgemeinen* Normalcurven an (wobei wir freilich nur die Fälle $p=0$ und $p=1$ ausführlicher betrachtet hatten). Nunmehr sollte als dritter Theil unserer Entwickelungen eine *Theorie der Theilcurven* folgen, welche aus unseren Normalcurven durch Projection entstehen können. Aber es ist Zeit hier mit unserem Referate über die algebraischen Raumcurven überhaupt abzubrechen. Nennen wir also nur noch die wichtige Literatur, welche hier zu berücksichtigen sein würde. Es sind dies vor allen Dingen die beiden groſsen Abhandlungen von *Halphen* und *Nöther*, die 1882 von der Berliner Akademie mit dem Steinerpreis gekrönt worden.*) Beide behandeln die Theorie der Raumcurven, d.h. der Curven im dreifach ausgedehnten Raume, in sehr viel ausgedehnterem Maaſse als bis dahin geschehen war. Halphen (deſsen Arbeit im cah. 52 des Journal de l'École Polytechnique 1882 veröffentlicht ist), knüpft dabei an seine oben bespro-

---

*) vergl. auch die Arbeit von *Valentiner* in Acta Math. II, 1882

chenen Sätze von 1870 an, indem er übrigens eine Form der Darstellung benutzt, die von unserem Standpunkte aus durchzudenken bleibt. Demgegenüber erscheint uns die Darstellungsweise von Nöther (vergl. Berliner Abhandlungen von 1883 oder auch den Auszug in Crelle's Journal t. 93, 1882) wesentlich zugänglicher. Immer wäre die Frage, ob sich nicht dadurch Vereinfachungen und gleichzeitig natürlich Verallgemeinerungen erzielen lieſsen, wenn man genau so, wie wir es hier begonnen, die Theorie der Normalcurven voranstellte und dann nicht nur nach denjenigen Theilcurven fragte, welche durch Projection der Normalcurven im R_3 entstehen können, sondern die Untersuchung gleich auf Theilcurven in beliebig ausgedehnten Räumen erstreckte.

(Pfingstferien.)

[Mo. 13.6.92.]

Dritter Theil: Von den symmetrischen Riemann'schen Flächen

(mit Heranholung von Entwickelungen aus der Theorie der Abel'schen Functionen).

Wir haben uns gegen Schluſs des Wintersemesters bereits darüber geeinigt, wie gegenwärtige Vorlesung weiter geführt werden soll; wir modificiren das jetzt nur insoweit, als wir die Theorie der symmetrischen Flächen und die geplanten Anwendungen der Abel'schen Functionen in einander schieben. Symmetrische Flächen resp. Gebilde sind solche, zu denen algebraische Gleichungen mit reellen Coëfficienten gehören, wie sogleich noch näher auszuführen sein wird. So sind es vorwiegend Realitätstheoreme, welche ich hier im Sinne habe. Was ich bislang von diesen Theoremen publicirt habe (so die Eintheilung der symmetrischen Flächen in meiner Schrift von 1881), hat nur wenig Anklang gefunden. Ich meine aber, daſs das nicht am Gegenstande der Untersuchung liegt, der mir vielmehr das gröſste Intereſse zu verdienen scheint, sondern an der knappen Form, mit der ich meine Resultate darstellte.

I. Elementarer Theil der Theorie.

A. Definition der symmetrischen Flächen; Stellung derselben innerhalb der Riemann'schen Theorie.

Läſst sich eine Fläche conform auf sich abbilden, so kann dies entweder *ohne* Umlegung der Winkel oder *mit* einer solchen geschehen.*) Wir unterscheiden demnach Trans-

---

*) Nur bei „Doppelflächen" würde sich diese Unterscheidung nicht aufrecht erhalten laſsen, aber Riemann'sche Flächen sind keine Doppelflächen; wo Doppelflächen fernerhin bei uns vorkommen, gelten sie ausdrücklich als *doppelt* überdeckt!

formationen „erster" Art, S, u. Transformationen „zweiter" Art Σ. Dem entspricht bei analytischer Formulirung die Unterscheidung, dass ein algebraisches Gebilde $f(s,z)=0$ entweder durch eine Transformation der folgenden Art: $s' = r_1(s,z)$, $z' = r_2(s,z)$ in sich übergehen kann, oder aber durch eine Transformation $s' = r_1(\bar{s},\bar{z})$, $z' = r_2(\bar{s}\,\bar{z})$, unter $\bar{s}, \bar{z}$ die conjugirten Werthe zu s, z verstanden.

Symmetrisch werden wir die Fläche bez. das algebraische Gebilde nennen, wenn es durch eine Transformation Σ von der Periode 2 (für welche also $\Sigma^2 = 1$ ist) in sich selbst übergeht. Hat $f(s,z)=0$ reelle Coëfficienten, so definirt es natürlich ein symmetrisches Gebilde. Denn die Gleichung $f=0$ wird sich nicht ändern, wenn man $s' = \bar{s}$, $z' = \bar{z}$ setzt. Aber das Wichtige ist, dass auch das Umgekehrte gilt: *Unter den unendlich vielen algebraischen Gleichungen $f(s,z)=0$, die zu einer Riemann'schen Fläche gehören, giebt es, wenn die vorgelegte Fläche symmetrisch ist, insbesondere solche, welche durchaus reelle Coëfficienten haben.*

Zum Beweise betrachte man zunächst eine beliebige algebraische Function $u+iv$ der Fläche. Sei $u+iv$ insbesondere der Werth, den sie in einem Punkte O der Fläche annimmt, u_1+iv_1 der Werthe in dem zu O symmetrischen Punkte O_1. Verpflanzt man dann den Werth $u_1 - iv_1$ nach O, so wird man damit eine neue algebraische Function der Fläche haben; in O_1 wird dieselbe den Werth $u - iv$ aufweisen Nun bilden wir

$$U + iV = (u + iv) + (u_1 - iv_1)$$
$$= (u + u_1) + i(v - v_1)$$

und haben damit eine algebraische Function der Fläche, welche an den symmetrischen Stellen der Fläche conjugirt imaginäre Werthe aufweist, welche sich selbst symmetrisch ist, wie wir in Kürze sagen können. Da genügt es denn, s und z speciell als zwei solche sich selbst symmetrische Functionen der Fläche zu wählen, um eine Gleichung $f(s, z) = 0$ zu erhalten, welche nothwendigerweise reelle Coëfficienten hat.

Die so definirten symmetrischen Flächen subsumiren sich natürlich unter die allgemeinere, im Wintersemester wiederholt betrachtete Flächenklaſse der *Riemann'schen Flächen mit eindeutigen Transformationen in sich*. Bei letzteren werden wir solche Flächen unterscheiden, welche blos durch Transformationen S in sich übergehen, und andere, bei denen neben S auch Transformationen Σ vorhanden sind. Auf alle Fälle bilden die S für sich, ebenso wie die S und Σ zusammen, eine „Gruppe"; sind Transformationen Σ vorhanden, so bilden die S innerhalb der Gesammtgruppe eine „ausgezeichnete" Untergruppe vom „Index 2". Ist N die

Gesammtzahl der Operationen, so kann man die Fläche mit einer Eintheilung in N Parzellen versehen derart, daſs jede der Parzellen in jede der anderen durch eine der N Operationen überführbar ist. Wir nennen dementsprechend die Fläche eine reguläre Fläche; oder wenn Operationen Σ vorhanden sind, eine regulär symmetrische. Dabei braucht keine der Operationen Σ gerade die Periode 2 zu haben; so oft es aber eine Operation Σ von der Periode 2 in der Gesammtgruppe giebt, so oft ist die Fläche im niederen Sinne „symmetrisch". Man rechne etwa als Beispiel einer regulär-symmetrischen Eintheilung die Zerlegung der Kugel- [Fr. 14.6.92.] fläche in die 120 abwechselnd symmetrischen und congruenten Ikosaederdreiecke. Hier sind 16 Operationen von der Periode 2 vorhanden. Es sind dies erstlich die „Spiegelungen" an den 15 „Symmetrieebenen" des Ikosaëders, dann die Zusammenordnung diametraler Kugelpunkte. Ich könnte ebensowohl die Gebietseintheilungen der Kegel hier heranziehen, welche in der Theorie der elliptischen Modulfunctionen, oder allgemeiner der automorphen Functionen, studirt werden. Der Unterschied ist nur, daſs es sich da um unendliche Gruppen von S oder Σ handelt. Wir beschränken uns in der Folge zumeist auf Riemann'sche Flächen mit $p > 1$. Da können solche unendliche Gruppen von S oder Σ niemals auftreten, weil die Gesammtzahl der S, resp. Σ, durch welche die Fläche in sich übergehen kann, für $p > 1$, wie wir schon im Wintersemester lernten, nothwendig eine endliche ist. Wir werden darum bei $p > 1$, um eine bestimmte reguläre oder regulär-symmetrische Eintheilung einer vorgelegten Fläche zu erhalten, nicht erst, wie bei der Kugel, die Gruppe der bei der Eintheilung zu Grunde zu legenden S oder Σ willkürlich auszusuchen brauchen, sondern einfach die Gesammtgruppe der S oder Σ nehmen, die es überhaupt giebt.

Wir erwähnten bereits auf p. 207 der Winterautographie, daſs sich Hr. Dyck in seiner Diſsertation und in Annalen 17 (1879-80) damit beschäftigt hat, alle regulären und regulär-symmetrischen Flächen aufzuzählen, welche bei $p = 1, 2, 3$ existiren. Es wäre wohl wünschenswert, diese Untersuchung jetzt ein Stück weiter zu führen, nachdem man in der Zwischenzeit sich so sehr viel mehr an die dabei nöthig werdenden gruppentheoretisch-geometrischen Operationen mit Riemann'schen Flächen gewöhnt hat.

Dabei werden die Sätze wesentlich in Betracht kommen, welche Hr. Hurwitz in den Göttinger Nachrichten von 1887, resp. den Annalen Bd. 32 gegeben hat. Auch Bd. 41 der Annalen wird neue Untersuchungen von Hurwitz über reguläre Riemann'sche Flächen bringen. Wir selbst gehen auf diese allgemeinen Fragen hier nicht näher ein, sondern beschränken uns auf kurze Betrachtung *der hyperelliptischen Flächen*.

Eine hyperelliptische Fläche, welche der Gleichung zufolge:

$$s = \sqrt{f_{2p+2}(z)}$$

zweiblättrig über der z Ebene ausgebreitet ist, geht immer durch die Operation S: $s' = -s$, $z' = z$, d.h. durch blosse Vertauschung der übereinander liegenden Blätter, in sich über. Mit der Identität zusammen bildet diese S eine G_2. Dieselbe erweitert sich zu einen G_4, wenn die Coëfficienten von $f(z)$ durchweg reell sind. Es treten dann nämlich folgende zwei Operationen zweiter Art hinzu:

$$\Sigma_1: \qquad s' = \bar{s}, \; z' = \bar{z};$$
$$\Sigma_2: \qquad s' = -\bar{s}, \; z' = \bar{z}.$$

Erstere wird als Spiegelung der Fläche an der Axe der reellen Zahlen schlechtweg bezeichnet werden dürfen, letztere als Verbindung der genannten Spiegelung mit der S, d.h. der Vertauschung der beiden Blätter. Zerspalten wir die hyperelliptische Fläche in zwei übereinanderliegende Blätter, indem wir sie einfach längs der Verzweigungsschnitte, durch welche die Blätter miteinander verbunden sind, zerschneiden, so haben wir eine der G_2 entsprechende reguläre Eintheilung der Fläche, zerlegen wir demnach jedes der Blätter, nachdem wir vorab die Verzweigungsschnitte symmetrisch geordnet haben, durch einen längs der reellen Axe geführten Schnitt in 2 symmetrische Hälften, so haben wir eine der Y_2 zugehörige regulär-symmetrische Eintheilung.

Dieses Beispiel der hyperelliptischen Flächen mit reellen f_{2p+2} wird in der Folge sehr oft herangezogen werden. (Wir nennen dabei das f_{2p+2} reell, während doch nur die *Gleichung* $f_{2p+2} = 0$ reelle Coefficienten zu haben brauchte. In der That können wir im letzteren Falle f_{2p+2} selbst immer reell wählen. Wir brauchen nur den imaginären Factor, der sich gegebenenfalls aus allen Gliedern von f abtrennen läſst, auf das s zu werfen. In der Folge stellen wir uns immer vor, daſs dies bereits vorweg geschehen sei).

B. Von der Aufzählung aller symmetrischer Flächen.

1. Wir beginnen damit, anzugeben, auf wieviel verschiedene Weisen eine Kugel mit sich selbst symmetrisch sein kann (d.h. durch eine Σ von der Periode 2 in sich selbst übergehen kann). Das ist offenbar auf 2 wesentlich verschiedene Arten möglich: das eine Mal bezieht man die Kugel auf sich selbst durch eine Centralprojection, deren Centrum auſserhalb liegt:

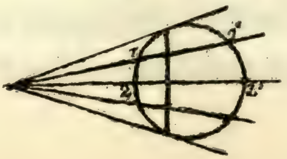


Fig. 1.

(1, 1'; 2, 2'; .... sind entsprechende Punkte), das zweite Mal durch eine Centralprojection, deren Centrum sich innerhalb der Kugel befinde:

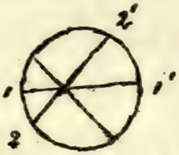


Fig. 2.

Im ersten Falle giebt es auf der Kugel eine sogenannte *Symmetrielinie*, deren Punkte bei der Umformung sämtlich festbleiben, das ist der Schnitt der Kugel mit der Polarebene des Projectionscentrums; im zweiten Falle giebt es eine solche Symmetrielinie nicht. Wir haben damit dasjenige Unterscheidungsmerkmal, nach welchem wir sogleich die symetrischen Flächen überhaupt eintheilen: nach *der Zahl und Art der Symmetrielinien*.

Erwähnen wir da gleich die Terminologie, welche ich anläßlich der Figuren 1 und 2 in Vorschlag gebracht habe. Figur 1 kann insbesondere so gezeichnet werden, daß das Projectionscentrum unendlich weit liegt. Die Polarebene wird dann eine Diametralebene und die zugehörige Centralprojection eine orthogonale Projection. Ich sage dementsprechend überhaupt von der Figur 1, die Kugel sei bei derselben *orthosymmetrisch* auf sich selbst bezogen. Die bei Figur 2 vorliegende Beziehung aber nenne ich diasymmetrisch, insofern bei ihr das Projectionscentrum insbesondere in den Mittelpunct der Kugel rücken kann, worauf je zwei diametrale Punkte der Kugel zusammengeordnet erscheinen. Diese Benennungen „orthosymmetrisch" und „diasymmetrisch" übertrage ich dann demnächst in noch zu erklärender Weise auf die Flächen eines beliebigen p.

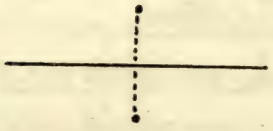
2. Wir betrachten jetzt fernerhin zunächst die hyperelliptischen symmetrischen Flächen, d.h. die Gebilde $s = \sqrt{f_{2p+2}^{(x)}}$ mit reellem f. Wie steht es bei ihnen mit den Symmetrielinien? Sei es, daß man die Operation Σ_1 oder Σ_2 zu Grunde legt? Offenbar müssen wir unterscheiden, wieviele reelle Wurzeln $f = 0$ haben mag, wie viele andererseits paarweise complex conjugirt sein mögen. Wir erhalten da eine Reihe leicht verständlicher Sätze, die wir hier ohne ausführlichen Beweis hinter einander aufführen mögen.

[Do. 15.6.92] a: Es seien 2μ der Verzweigungspuncte reell, wo $\mu > 0$. Die x Axe wird dann in μ Segmente zerfallen längs deren f abwechselnd positiv und negativ ist. Für die Operation Σ_1 bilden nun diejenigen μ auf der hyperelliptischen Fläche gelegenen geschlossenen Curven die Symmetrielinien, welche über den Segmenten mit positivem f liegen. Andererseits geben die μ Curven, welche über den Segmenten mit negativem f liegen, die

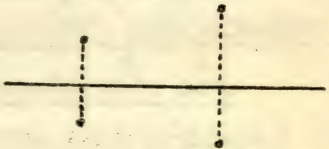
Symmetrielinien für Σ_2 *)

b. Alle Verzweigungspunkte seien imaginär. Wir denken uns f (welches jetzt eine „definite" Form sein wird) der Einfachheit halber als positive Form. Dann bleiben bei Σ_2 überhaupt keine Punkte der Fläche fest: es giebt für Σ_2 keine Symmetrielinie. Dagegen bleiben bei Σ_1 alle Punkte fest, welche oberhalb der x Axe liegen. Und hier müssen wir unterscheiden, ob p gerade ist oder ungerade.

Man denke sich die Verzweigungsschnitte der hyperelliptischen Fläche in einfachster Weise so geordnet, daß man je 2 conjugirt imaginäre Verzweigungspunkte geradlinig durch einen Schnitt verbindet:



$p = 0$



$p = 1$

Da sieht man, daß die Punkte der hyperelliptischen Fläche, welche oberhalb der x Axe liegen, im Falle eines geraden p einen einzigen Curvenzug bilden, im Falle eines ungeraden p aber zwei. Wir haben also für Σ_1 eine oder

---

*) Die Regel ist einfach: Bei Σ_1 bleiben diejenigen Punkte fest, welche reelles x und reelles s besitzen, bei Σ_2 die anderen, welche reelles x und rein imaginäres s besitzen.

zwei Symmetrielinien, je nachdem $p \equiv 0$ oder $\equiv 1 \pmod{2}$.

126 c., Wir übertragen nun die Benennungen *orthosymmetrisch* und *diasymmetrisch* auf unsere hyperelliptischen Flächen (wie bald auf die symmetrischen Flächen überhaupt). Orthosymmetrisch soll eine symmetrische Fläche heissen, die längs der Symmetrielinien zerschnitten in zwei Stücke zerfällt; diasymmetrisch dagegen eine solche, welche nach Zerschneidung entlang sämmtlicher Symmetrielinien immer noch ein zusammenhängendes Ganze bildet. Da ist ersichtlich:

Die Flächen mit $\mu = 1, 2, \ldots p$ sind diasymmetrisch, sowohl für Σ_1 als Σ_2.

Ebenso zeigt die Fläche $\mu = p+1$ für Σ_1 und Σ_2 übereinstimmend orthosymmetrisches Verhalten.

Die Fläche $\mu = 0$ ist gegenüber Σ_2 (insofern da gar keine Symmetrielinie vorhanden ist) diasymmetrisch, gegenüber Σ_1 aber orthosymmetrisch.

Also zusammenfassend: *Die hyperelliptischen symmetrischen Flächen ergeben uns Beispiele für*

diasymmetrische Flächen mit $0, 1, \ldots p$ Symmetrielinien, und für orthosymmetrische Flächen mit 1 oder 2 und mit $p+1$ Symmetrielinien.

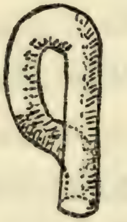
Dies sind im Ganzen $p+3$ Arten hyperelliptischer symmetrischer Flächen, wobei ich das Wort „Art" gleich so gebrauche, wie es fernerhin geschehen soll, dass ich alle diejenigen symmetrischen Flächen zu derselben Art rechne, welche erstens denselben allgemeinen Charakter haben (d.h. gleichzeitig orthosymmetrisch oder diasymmetrisch sind) und übrigens dieselbe Zahl von Symmetrielinien besitzen.

Habe ich nun damit Beispiele für alle Arten symmetrischer Flächen, die es giebt? Ich behaupte, daſs das in der That der Fall ist, was die diasymmetrischen Fälle angeht, daſs es dagegen, allgemein zu reden, noch eine gröſsere Zahl orthosymmetrischer Fälle giebt, nämlich überhaupt orthosymmetrische Fälle mit $p+1$, $p-1$, $p-3$ ...... Symmetrielinien (wo die Differenz zwischen $p+1$ und der Zahl λ der Symmetrielinien allemal gerade ist). Von diesen orthosymmetrischen Fällen ist dann jeweils nur der erste und der letzte unter den hyperelliptischen Fällen vertreten.

Um dies zu beweisen (womit wir dann eine allgemeine Aufzählung aller symmetrischen Flächen geben), bemerken wir der Reihe nach Folgendes:

3) a. Wir haben die geschlossenen Flächen früher [Fr. 18.6.92.] schon eingetheilt in einfache Flächen und Doppelflächen, d.h. in Flächen, bei denen man zwischen den beiden Flächenseiten unmittelbar unterscheiden kann, und solche, bei denen die beiden Flächenseiten unmittelbar zusammenhängen und ein untrennbares Ganze bilden. Für die Riemann'sche Theorie kommen direct nur die ein-

einfachen Flächen in Betracht. Daher beschränken wir uns bei der Aufzählung der symmetrischen Flächen ausschließlich auf die einfachen Flächen. Das schließt nicht aus, daß die Doppelflächen indirect für uns von besonderer Wichtigkeit werden. Man denke sich nämlich eine solche Doppelfläche beiderseitig, d.h. vollständig, mit einer Membran überzogen. Diese Membran bildet dann eine einseitige Fläche von doppelter Ausdehnung, welche so, wie sie über sich selbst hinlaufend auf der Doppelfläche aufliegt, offenbar symmetrisch auf sich selbst bezogen ist. Die Membran giebt uns also ein Beispiel einer symmetrischen Fläche und zwar einer symmetrischen Fläche ohne Symmetrielinie (insofern wir die Betrachtung an einer geschloſsenen Doppelfläche durchführen). Ich erinnere hier gleich an die einfachsten Beispiele geschloſsener Doppelflächen, die wir haben. Das ist für $p = 0$ die unbegrenzte Ebene der projectiven Geometrie (die durch das Unendlichweite hindurch in sich selbst zurückläuft), für $p = 1$ der in sich selbst nach einer Umstülpung zurückkehrende Ring (oder Kautschuk-Schlauch). Fügen wir an diese Ebene, bez. diesen Ring eine beliebige Zahl, ρ, von „Handhaben" an so wächst das p um 2ρ Einheiten.*) (In der



---

*) womit wir dann Beispiele geschloſsener Doppelflächen für jedes p vor Augen haben.

That ist unter dem p einer Doppelfläche, wie wir früher ausführten, zweckmäſsigerweise gleich das p jener einfachen Fläche zu verstehen, welche wir über die Doppelfläche zweifach ausbreiten; anderenfalls würde man die Definition des p auf Doppelflächen gar nicht ohne weiteres übertragen können).

b. Sei nun eine symmetrische Fläche vorgelegt. Wir nehmen an, daſs ein Punkt O derselben bei der symmetrischen Umformung Σ, durch welche die Fläche in sich übergeht, ungeändert bleibt. In der Nähe von O hat Σ nothwendig den Charakter einer gewöhnlichen Spiegelung, d. h. es giebt ein durch O hindurchlaufendes Linienelement, welches bei Σ festbleibt (und die übrigen Punkte, welche vermöge Σ paarweise zusammengeordnet werden, von einander trennt). Wir gehen auf diesem Linienelement ein Stück vorwärts und wiederholen dieselbe Ueberlegung. Da ist ersichtlich, daſs wir, so fortschreitend, von O aus eine ganze über die Fläche hinlaufende Linie solcher Punkte bekommen, die bei Σ festbleiben, d. h. eine *Symmetrielinie*.

Das ist genau das Umgekehrte von dem, was wir erhalten, wenn wir annehmen, unsere Fläche gehe durch eine Operation erster Art, S, in sich über. Bleibt O bei der Operation S unverändert, so hat S in der Nähe von O den Charakter einer Drehung: O ist nothwendig ein isolirter Fixpunkt. Uebrigens werden wir annehmen, daſs jede bei Σ auftretende Symmetrielinie in sich zurückläuft. Wäre das nicht der Fall, so müſste die Symmetrielinie sich über unsere Fläche spiralig hinwinden, was zu transcendenten Beziehungen führen würde, die bei algebraischen Gebilden, und auf solche wollen wir hinaus, sicher nicht vorkommen können. Ferner bemerke man, daſs zwei Symmetrielinien der Fläche sich nie schneiden können (so wenig, wie eine Symmetrielinie sich selbst überkreuzen kann). Denn von jedem einzelnen bei Σ festbleibenden Punkte O der Fläche aus läuft eben nur eine einzige bei Σ festbleibende Richtung aus.

c. Welches sind nun, was die Zahl und Art der Symmetrielinien angeht, die verschiedenen bei einer „einfachen" Fläche vorhandenen Möglichkeiten? Ist die Fläche diasymmetrisch, d.h. zerfällt sie nicht, wenn man sie längs der Symmetrielinien zerschneidet, so kann die Zahl sicher nicht groſser als p sein. Denn eine Fläche vom Geschlechte p läſst nach der allgemeinen Theorie des Flächenzusammenhanges überhaupt nicht mehr als p nicht zerstückende Rückkehrschnitte nebeneinander zu. Nun gab uns aber schon der hyperelliptische Fall Beispiele diasymmetrischer Flächen mit $0, 1, \ldots\ldots p$ Symmetrielinien. Alle diese Zahlen von Symmetrielinien kommen also bei *dem diasymmetrischen Flächen wirklich vor.* Wir nehmen zweitens an, die Fläche sei orthosymmetrisch, sie zerfalle also bei der Zerschneidung der Fläche in zwei symmetrische Stücke. Wir werden rückwärts die allgemeinste orthosymmetrische Fläche aufbauen, indem wir eines dieser beiden Stücke beliebig annehmen und mit seiner symmetrischen Wiederholung in zweckmäſsiger Weise : zusammenfügen. Habe nun dieses einzelne Stück λ Randcurven und gehöre übrigens zum Geschlechte π, d.h. es soll möglich sein, auf demselben π, aber auch nicht mehr, nicht zerstückende Rückkehrschnitte neben einander anzubringen. Dieselben Zahlen λ, π werden dann für das symmetrische Stück gelten. Und fügen wir nun die beiden Stücke durch Vereinigung ihrer Randcurven zur geschloſsenen Fläche zusammen, so wird diese durch $2\pi + \lambda$ Rückkehrschnitte nothwendig in 2 Stücke zerfallen, also $2\pi + \lambda - 1$ neben einander bestehende nicht zerstückende Rückkehrschnitte zulaſsen. Da haben wir also $p = 2\pi + \lambda - 1$, d.h. $\lambda = p + 1 - 2\pi$, wo π nur der einen selbstverständlichen Bedingung unterliegen wird, daſs $\lambda > 0$ sein muſs. *Wir erhalten so, was die Zahl der Symmetrielinien orthosymmetrischer Flächen angeht, in der That alle die Fälle $\lambda = p+1, p-3, \ldots.,$ deren Existenz wir eben behauptet hatten.* Und nun sage ich schlieſslich, daſs es keine anderen symmetrischen Flächen geben kann, als eben diasymmetrische und orthosymmetrische:

es ist unmöglich, daſs eine symmetrische Fläche bei Zerschneidung längs der Symmetrielinien etwas Anderes angäbe, als entweder ein Stück, welches zu sich selbst symmetrisch ist, oder zwei Stücke, die einander symmetrisch entsprechen.

Sicher müſsen doch alle Stücke, welche bei der Zerschneidung entstehen, entweder sich selbst symmetrisch sein oder paarweise als symmetrische zusammengehören. Nun füge man, je nachdem, jedes einzelne Stück entweder mit sich selbst oder mit dem zugehörigen Stück längs der Symmetrielinien, welche es trägt, zusammen. So erhält man lauter geschlossene Flächen, deren Inbegriff mit der ursprünglich gegebenen geschloſsenen Fläche gleichbedeutend sein soll.

Das heiſst aber doch, daſs wir bei unserer Construction nur eine geschloſsene Fläche erhalten dürfen, und eben dies bedeutet, nur in anderer Formulirung, unser Satz.

4) Wir werden uns jetzt *einfache Repräsentanten* der sämmtlichen Arten symmetrischer Flächen bilden, indem wir das Princip aufnehmen, von dem wir schon unter 1) beiläufig Gebrauch machten, um eine diasymmetrische Fläche mit null Randcurven zu construiren. Wir dachten uns damals eine geschloſsene Doppelfläche zweifach mit einer Membran überdeckt. Genau so wollen wir uns jetzt eine beliebige Fläche, die λ Randcurven besitzen mag, doppelt überdeckt denken und die beiderseitigen Ueberdeckungen

jedesmal längs der Randcurve aneinander heften. In der so gewonnenen Membran haben wir dann ersichtlich eine symmetrische Fläche mit λ Symmetrielinien vor uns. War die ursprünglich gegebene Fläche „einfach", werden also die beiden „Flächenseiten" durch die Randcurven von einander abgetrennt, so wird die construirte symmetrische Fläche orthosymmetrisch sein, diasymmetrisch aber, wenn die ursprünglich gegebene Fläche eine Doppelfläche war. Sei im ersten Falle π das Geschlecht der gegebenen [mit λ Randcurven ausgestatteten] Fläche. Wir verstehen darunter, daſs man auf ihr neben einander π nicht zerstückende Rückkehrschnitte ziehen kann. Das Geschlecht der orthosymmetrischen Fläche, welche wir construiren, wird dann ersichtlich $p = 2\pi + \lambda - 1$. Sei andererseits im Falle, daſs eine Doppelfläche vorgegeben wird, p' das Geschlecht der diese Fläche zweifach überdeckenden Membran, also die Zahl der Rückkehrschnitte, welche man neben den 2λ Randcurven auf der Membran anbringen kann, ohne sie zu zerstücken.

Unsere diasymmetrische Fläche entsteht aus besagter Membran, indem man die in den Randcurven zusammenstoſsenden Theile derselben an einander heftet. Das Geschlecht der diasymmetrischen Fläche wird daher $p = p' + \lambda$.

5. Ersichtlich kann man jede orthosymmetrische Fläche in der hiermit geschilderten Weise durch Auſsenseite

und Innenseite einer „einfachen" Fläche ersetzen: kann man doch als solche einfache Fläche die eine der beiden Hälften selbst nehmen, in welche die orthosymmetrische Fläche durch Zerschneidung längs der Symmetrielinien zerfällt.

Nun ist bekannt (Moebius, Theorie der Elementarverwandschaft, Werke II, C. Jordan, in Liouvilles Journal 1866), daſs zwei einfache Flächen, welche daſselbe Geschlecht π und dieselbe Anzahl λ von Randcurven besitzen, im Sinne der Analysis situs aequivalent sind, d.h. stetig eindeutig auf einander bezogen werden können. Daſselbe gilt also auch von den orthosymmetrischen Flächen deſselben p und deſselben λ, d.h. von den orthosymmetrischen Flächen derselben „Art". Wir werden das in bekannter Weise so aussprechen, daſs wir sagen:

Die orthosymmetrischen Flächen derselben Art bilden ein zusammenhängendes Continuum.

Offenbar gilt für die diasymmetrischen Flächen derselbe Satz. Um denselben zu beweisen, können wir uns freilich nicht auf frühere Arbeiten anderer Mathematiker berufen: denn die Doppelflächen z.B. sind in diesen früheren Arbeiten unberücksichtigt geblieben. Es gelingt aber den Beweis doch so zu führen, daſs man die *Methode* jener früheren Arbeiten mutatis mutandis beibehält. Vergl. die weiterhin noch oft zu nennende Leipziger Diſsertation von *Weichold*, 1883 [Schlömilchs Zeitschrift, Bd 28]. Vergl. andererseits die

Arbeit von Dyck in Ann. 33, 1888.

6.) Mit den symmetrischen Flächen werden auch [Mo. 18.6.92] die zugehörigen algebraischen Gebilde (deren Vorhandensein wir aus dem Riemann'schen Existenzsatze schlieſsen) je ein Continuum bilden. Es wird sich weiterhin darum handeln, die Zahl der Dimensionen festzustellen, von denen das einzelne Continuum abhängt. Wir erinnern daran, daſs wir früher (p. 113 der Winterautographie) die gleiche Aufgabe für die Gesammtheit der algebraischen Gebilde irgendwelchen p geleistet haben. Wir greifen hier auf das damalige Resultat zurück, indem wir das, was wir damals einen Modul nannten, jetzt als zwei reelle Parameter zählen (die damals bestimmten Moduln waren ja allgemein zu reden complexe Gröſsen). Wir haben dann den Satz, daſs die Gesammtheit der reellen Parameter, von welchen die Gebilde eines gegebenen p abhängen, $6p-6+2\rho$ beträgt. Hier ist 2ρ die Zahl der rellen Parameter, die in den eindeutigen Transformationen vorkommen, durch welche die Riemann'sche Fläche in sich selbst übergeht, d.h.
$= 6$ für $p = 0$, $= 2$ für $p = 1$, und $= 0$ für $p > 1$. Aber nicht nur dies Resultat, sondern auch die Methode, mittelst deren daſselbe damals abgeleitet wurde, wollen wir uns hier vergegenwärtigen. Wir zählten ab, wie vielfach unendlich die Zahl der m-blättrigen Flächen über der Ebene ist, in

welche man eine vorgegebene Riemann'sche Fläche verwandeln kann (wobei wir m, um nicht in die Ausnahmefälle des Riemann-Roch'schen Satzes hineinzugerathen, $> 2p-2$ voraussetzen) und verglichen dann diese Zahl mit der Zahl der m-blättrigen Flächen deſſelben p, die es überhaupt giebt. Genau so werden wir hier bei den symmetrischen Flächen verfahren, nur daſs wir jeden einzelnen Schritt unter Berücksichtigung der Symmetrie einrichten.

Wir wollen dabei, um Fallunterscheidungen zu vermeiden, m gleich als gerade Zahl voraussetzen. Wir suchen dann auf der gegebenen symmetrischen Fläche eine Punktgruppe G_m so, daſs ihre Punkte paarweise als symmetrische Punkte zusammengehören. Da können wir gerade $m/2$ Punkte beliebig annehmen, wobei jeder der Punkte, weil er sich frei auf der gegebenen Fläche bewegen kann, für zwei reelle Willkürlichkeiten zählt. Wir haben also ∞^m Möglichkeiten. Jetzt konstruiren wir uns die sämmtlichen reellen algebraischen Functionen z, welche in den Punkten der einzelnen solchen G_m unendlich werden.

Dieselben sind jedenfalls unter der Form enthalten:

$$z = c_1 Z_1 + c_2 Z_2 + \dots\dots\dots\dots c_m Z_m + C,$$

unter $Z_1, Z_2 \dots\dots$ Normalintegrale zweiter Gattung verstanden, die in den einzelnen Punkten von G_m unendlich werden. Die $c_1 \dots\dots c_m$ werden dabei den Bedingungen

gen zu unterwerfen sein:

$$\begin{array}{ll} & c_1\varphi_1(1)+\dots\dots\dots\dots c_m\varphi_1(m)=0,\\ (\alpha) & c_1\varphi_2(1)+\dots\dots\dots\dots c_m\varphi_2(m)=0,\\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ & c_1\varphi_p(1)+\dots\dots\dots\dots c_m\varphi_p(m)=0,\end{array}$$

unter $\varphi_1, \varphi_2, \dots\dots \varphi_p$ die zugehörigen Formen erster Gattung verstanden. Hier werden wir nun die $\varphi_1, \dots\dots \varphi_p$ als reelle Ausdrücke voraussetzen dürfen, die $h_1, h_2, h_3, \dots\dots$ aber als paarweise conjugirt. Wir werden ferner die $c_1, c_2, c_3, \dots\dots\dots$ durch paarweise conjugirte Werthe $a_1+ib_1, \dots\dots$ ersetzen, endlich die Bedingung einführen, daſs C eine reelle Constante sei. Da bei dem angenommenen Werth von m die p Gleichungen (α) jedenfalls linear unabhängig sind, so haben wir schlieſslich in dem Ausdrucke für z $(m-p+1)$ reelle willkürliche Parameter. Daher im Ganzen ∞^{2m-p+1} Möglichkeiten, unsere symmetrische Fläche in der beschriebenen Weise auf eine m blättrige Fläche über der Ebene zu beziehen. Jetzt möge σ die Zahl der reellen Parameter sein, welche in den reellen eindeutigen Transformationen unserer Fläche in sich vorkommen: diese Zahl σ ist, wie man findet, für $p=0$ gleich 3, für $p=1$ gleich 1 und für gröſsere p natürlich 0. So haben wir das Resultat, daſs unsere vorgegebene Riemann'sche Fläche mit $\infty^{2m-p+1-\sigma}$ verschiedenen m-blättrigen Flächen der bei unserem Ansatz entstehenden Art gleich„

werthig ist. Aber eine solche Fläche hat $2m-2+2p$ Verzweigungspunkte, welche entweder reell oder zu je zwei conjugirt sind, und die unter Aufrechterhaltung der hierin liegenden Beschränkung beliebig verschoben werden können, ohne daſs dabei die Art der Fläche geändert würde. Das giebt $2m-2+2p$ reelle Parameter, also $\infty^{2m+2p-2}$ m-blättrige Flächen unserer Art. Indem wir durch die eben erhaltene Zahl dividiren, folgt endlich als *Zahl der innerhalb unserer Art zu unterscheidenden reellen algebraischen Gebilde $\infty^{3p-3+\sigma}$.* Wir haben hier also für jede der $\left[\frac{3p+4}{2}\right]$ Arten $3p-3+\sigma$ *reelle Moduln*, d.h. genau die halbe Zahl von derjenigen, die bei der Gesammtheit der algebraischen Gebilde des Geschlechtes p auftrat.

Mit dieser Abzählung ist implicite die entsprechende Frage für *berandete Flächen* beantwortet, was darum ein gewiſses Intereſse hat, weil diese Frage von Riemann in seiner Diſsertation aufgeworfen, aber nicht zu Ende discutirt wird. Riemann denkt natürlich nur an berandete *einfache* Flächen (nicht an Doppelflächen; denn deren Existenz wurde erst zehn Jahre später von Moebius bemerkt und wohl erst in meiner Schrift für functionentheoretische Zwecke herangezogen). Sei nun eine solche Fläche mit λ Randcurven gegeben, auf der man noch π nicht zerstückende Rückkehrschnitte ziehen kann. So betrachten wir sie als die Hälfte einer orthosymmetrischen Fläche vom Geschlechte $2\pi+\lambda-1$ mit λ Symmetrielinien und wenden dementsprechend den Satz von den Moduln der symmetrischen Flächen an. Wir finden so: dass $6\pi+3\lambda-6-\sigma$ reelle Constanten beiderseits gleich sein müssen, wenn zwei berandete Flächen (π,λ) eindeutig sollen aufeinander abbildbar sein, worauf dann die Abbildung sich auf ∞^{σ} Weisen ermöglicht. Dieser Satz stimmt mit den näheren Angaben, welche Riemann in seiner Dissertation für den einfachen Fall: $\pi=0$, $\pi=1$ der einfach berandeten, einfach zusammenhängenden Fläche macht: da ist $\sigma=3$ und daher für die Abbildbarkeit zweier berandeter Flächen aufeinander gerade keine Bedingung zu erfüllen, zugleich ist die Abbildung allemal auf dreifach unendlich viele Weisen möglich.

Beiläufig bemerken wir, dass Riemann l.c. auch von der Frage der mehrdeutigen Abbildung zweier Flächen aufeinander spricht. Diese Frage ist bisher nur erst für den Fall untersucht, dass eine Fläche auf sich selbst abgebildet werden soll. In der That fällt sie da mit derjenigen zusammen, mit der sich die sog. Correspondenztheorie beschäftigt. Wir haben über letztere auf p. 299/300 der Winterautographie und dann wieder zu Beginn des Sommersemesters ja bereits einige orientierende

Bemerkungen gemacht.

[Di. 21.6.92.] Weiterhin werden von den hiermit entwickelten Sätzen insbesondere diejenigen zur Geltung kommen, welche sich auf die Möglichkeit beziehen, irgend zwei symmetrische Flächen derselben Art ohne aus der Art herauszutreten continuirlich in einander überzuführen. Wir werden zum Beispiel eine Realitätsuntersuchung nur für einen einzelnen Repräsentanten jeder Flächenart machen und das Resultat von da aus auf alle symmetrischen Flächen derselben Art ausdehnen. Als solche Repräsentanten werden uns häufig die hyperelliptischen Flächen dienlich sein („hyperelliptische" Methode). Leider geben uns diese ja, was orthosymmetrische Flächen angeht, Beispiele nur für den niedersten und den höchsten Fall; die hyperelliptische Methode ist also, sobald $p > 3$ wird, wesentlich unvollständig.

Andererseits erinnere man sich, daſs der niederste diasymmetrische und der niederste orthosymmetrische Fall bei demselben hyperelliptischen Gebilde (dem Gebilde mit nur imaginären Verzweigungspunkten) auftreten [wobei das eine Mal die Operation Σ_1, das andere Mal die Operation Σ_2 zu Grunde gelegt wird]; hierin ist begründet, daſs die genannten beiden Fälle bei unseren späteren Betrachtungen vielfach coordonnirt erscheinen.

Eine andere Art, einen Repräsentanten innerhalb der einzelnen Flächenart auszusuchen und von ihm aus die weiteren Schlüſse zu machen, bezeichne ich als *Doppelpunktmethode*. Wir haben schon oft davon Gebrauch gemacht, daſs aus einer mehrblättrigen Fläche beim Zusammenrücken zweier geeigneter Verzweigungspunkte eine Fläche vom Geschlechte (p-1) entsteht, bei der die bez. Verzweigungspunkte sich compensieren, d.h. wegfallen. Es bleiben dann in den beiden Blättern, die vorher durch die Verzweigungspunkte verbunden waren, nur zwei „Narben" zurück. Geometrisch bedeutet dies, daſs die ebene Curve, die wir der mehrblättrigen Fläche coordiniren mögen, einen *Doppelpunkt* bekommt; die beiden Curvenpunkte, die im Doppelpunkte vereinigt sind, sind es, denen die beiden „Narben" der ausgearteten mehrblättrigen Fläche entsprechen. Möge man nun eine symmetrische Fläche in der Weise dargestellt haben, daſs man über eine „tragende" Fläche mit λ Randcurven beiderseitig eine Membran ausbreitet und deren übereinander liegende Partieen längs der λ Randcurven aneinander heftet. Dann wird man den in Rede stehenden Uebergang zu einer Fläche vom Geschlechte (p-1) insbesondere in der Weise vollziehen können, daſs man eine beliebige der λ Oeffnungen der tragenden Fläche auf einen Punkt zusammenzieht und damit zum Verschwinden bringt. Für die zugehörige reelle ebene

Curve heißt das, daß einer der zugehörigen reellen Züge, ohne daß die Curve aufhörte, reell zu sein, sich in einen isolirten Doppelpunkt verwandelt. Und eben diese Curve vom Geschlechte $(p-1)$, mit dem isolirten Doppelpunkte, werden wir dann bei Gelegenheit als Repräsentanten der allgemeinen Curven vom Geschlechte p betrachten. Die besondere Tragweite der Riemann'schen Methoden aber werden wir gerade in der Leichtigkeit erblicken, mit welcher vermöge derselben derartige Particularisirungen vorgenommen werden können. In der That beherrscht man die reellen Curvengestalten von der algebraischen Gleichung aus noch in keiner Weise so vollständig, daß man, bei höherem p, über die Möglichkeit entscheiden könnte, den einen oder anderen Curvenzug zu einem isolirten Doppelpunkte zusammenzuziehen.

C. Beziehungen der Theorie der symmetrischen Flächen zur Curvenlehre.

Daß jede reelle Curve eines beliebig ausgedehnten Raumes, sagen wir jede C_m eines R_q, eine symmetrische Riemann'sche Fläche definirt, braucht hier kaum wiederholt zu werden. Dagegen fügen wir hinzu, daß sie uns vermöge der Schnitte, die sie mit den „Ebenen“

des R_q gemein hat, auf der symmetrischen Fläche eine „reelle" G_m^q liefert. Dieselbe enthält, entsprechend den Schnitten der C_m mit den reellen Ebenen, q-fach unendlich viele reelle G_m, d.h. solche Punktgruppen G_m, deren m Punkte entweder einzeln sich selbst oder zu je zweien einander symmetrisch sind. Umgekehrt werden wir, sobald eine symmetrische Fläche gegeben vorliegt, auf dieser in mannigfachster Weise reelle G_m^q construiren können, wie wir sogleich noch ausführen, und haben dann jeder solcher G_m^q entsprechend nothwendig eine reelle C_m des R_q. Dass reelle Curvenzüge und Symmetrielinien der Fläche sich dabei entsprechen, braucht kaum noch hervorgehoben zu werden. So haben wir denn, dass die C_m des R_q bei gegebenen p allgemein zu reden in ebensoviele Arten zerfallen, als es symmetrische Flächen des Geschlechtes p giebt. Wir unterscheiden dementsprechend

$(p-1)$ Arten von diasymmetrischen Curven, bez.
mit $0, 1, \ldots\ldots\ldots p$ reellen Zügen,

$\left[\frac{p+2}{2}\right]$ Arten orthosymmetrischer Curven mit
$p+1, p-1, p-3,$ reellen Zügen.

Wie wir dabei die Worte „diasymmetrisch" und „orthosymmetrisch" am einfachsten durch reelle Constructionen an der reellen Curve erklären, wird später zu erläutern sein. Die einzige allgemeine Einschränkung, die wir unmittelbar vor Augen sehen, ist die, dass im diasymmetrischen Falle mit $\lambda = 0$ selbstverständlich die Ordnung m der Curve eine gerade sein muss. Im Uebrigen erinnern wir uns an den Harnack'schen Satz aus Annalen X, 1876, demzufolge für jedes p ebene Curven mit $p+1$ reellen Zügen existiren sollten, die Zahl $p+1$ aber von den reellen Zügen auch nicht überschritten werden konnte.

Dieser Satz erscheint hier als blosses Corollar unserer allgemeinen Eintheilung der reellen Curven eines beliebig ausgedehnten Raumes in $\left[\frac{3p-4}{2}\right]$ Arten.

[Do. 23.6.92] Uebrigens werden hier nun, betreffs der reellen G^q_m auf einer symmetrischen Fläche, alle die Untersuchungen von Vollschaaren und Theilschaaren, von allgemeinen Schaaren und Specialschaaren wiederkehren, die wir im Wintersemester einführten. Wir reden hier nur von den „Vollschaaren allgemeinen Characters" G^{m-p}_m und den ihnen entsprechenden „Normalcurven", ferner von der „umfassendsten Specialschaar", die es giebt, der G^{p-1}_{2p-2} und der zugehörigen „Normalcurve der φ". Hinterher würden wir fragen können (was wir aber nicht mehr ausführen), welche Curven in niederen Räumen aus den genannten durch reelle Projection entstehen mögen. Da würde denn eine Discussion der Realitätsverhältnisse des Specialgruppenproblems in Betracht kommen!

Bei der Discussion der *allgemeinen Normalcurven* C_m des R_{m-p} gehen wir davon aus, die m Punkte, in welchen die Curve das Unendlichweite des R_{m-p} schneiden soll, auf der symmetrischen Fläche in geeigneter Weise anzunehmen. Wir construiren dann die zugehörigen Functionen

$$c_1 h_1 + c_2 h_2 + \ldots\ldots c_m \; h_m + C$$

suchen unter ihnen $m-p$ linear unabhängige reelle algebraische Functionen aus und setzen diese gleich den $m-p$ (nicht homogenen) Coordinaten des R_{m-p}.

Sei hier m erstlich eine gerade Zahl. Wir können dann die m Punkte (wie wir dies schon oben bei der Abzählung der reellen Moduln der symmetrischen Flächen thaten) paarweise einander symmetrisch wählen und erhalten dann im R_{m-p} eine reelle Curve, welche genau so viele (λ) reelle Züge besitzt, als die Fläche Symmetrielinien aufweist, *das Unendliche aber nicht reell schneidet*. Die Curve ist also nach ihrem reellen Verlauf ganz im Endlichen gelegen (wobei man ja wohl den Fall $\lambda = 0$ noch besonders hervorheben wird, wo eine derartige Behauptung nur uneigentliche Bedeutung hat, da doch überhaupt kein reeller Curvenpunkt vorhanden ist). Man specificire dies Resultat für die niedersten Werthe von p (wobei noch in Betracht kommen wird, daſs es für $p = 0, 1$ überhaupt keine anderen Vollcurven als die hier gemeinten giebt) und mache sich etwa noch deutlich, daſs bei reeller Parallelprojection der genannten Curven auf niedere Räume immer wieder Curven derselben Ordnung entstehen müſsen, welche sich, ihrem reellen Verlaufe nach, nicht in's Unendliche ziehen.

Sei ferner m beliebig, aber $\lambda > 0$. Wir wählen $k \leqq \frac{m}{2}$ und verlegen $(m - 2k)$ der Unendlichkeitspunkte irgendwie auf die Symmetrielinien und nehmen nur die übrigen $2k$ Punkte paarweise symmetrisch. Wir bekommen so eine C_m des R_{m-p}; welche sich mit irgend $(m - 2k)$ ihrer Punkte durch's Unendliche zieht. Und das Charakteristische dabei ist, daſs diese ganz beliebig auf die λ Symmetrielinien, d.h. die reellen Züge der Curve vertheilt sein können, und auf demselben Zuge nach Belieben zusammenfallen dürfen. Durchsetzt einer der Züge das Unendlichweite in einer unpaaren Zahl von Punkten, so ist er überhaupt unpaar etc. Da haben wir für $p = 0$ und $m = 2$ die gewöhnliche Eintheilung der reellen Kegelschnitte in Ellipse, Parabel, Hyperbel, für $p = 0$ und $m = 3$ die entsprechende Eintheilung der Raumcurven dritter Ordnung etc.

Leider tragen die so formulirten elementaren Sätze ja nicht weit, weil die meisten Curven, die uns interessiren, Specialcurven sind. So wird man beispielsweise die *Hilbert*'schen Realitätssätze über Raumcurven vom Maximalgeschlecht, über die wir oben referirten (p. 64), hier nicht einordnen können. Um so lieber wenden wir uns jetzt zur

Normalcurve der φ.

Wir definiren dieselbe hier, wie auch sonst, durch den Ansatz

$$\varphi_1 : \varphi_2 : \ldots\ldots \varphi_p = dw_1 : dw_2 : \ldots\ldots dw_p ,$$

wobei wir nur den Zusatz machen, dass wir die dw jetzt als *reelle* Differentiale gewählt denken, was augenscheinlich immer möglich ist. Das allgemeinste reelle Differential (erster Gattung) wird dann durch $\Sigma c_k dw_k$ gegeben, unter den c_k reelle Constanten verstanden. Unsere „reelle" Curve wird also bis auf „reelle" Collineationen, denen man dieselbe unterwerfen mag, bestimmt sein. Und wir werden genau so viele Arten reeller Curven unterscheiden, als es Arten symmetrischer Flächen giebt, also $(p+1)$ diasymmetrische Arten, mit $p, p-1, \ldots . 1, 0$ reellen Zügen, und $\left[\frac{p+2}{2}\right]$ orthosymmetrischen Arten, mit $p+1, p-1, \ldots .$ reellen Zügen.

Ich sage nun vor allen Dingen: *die reellen Züge der vorgenannten Curven sind sämmtlich paar.* Zum Beweise habe ich zu zeigen, dass jeder dieser Züge von einer beliebigen reellen „Ebene" $\Sigma c_k \varphi_k = 0$ in einer paaren Anzahl von Punkten getroffen wird, d.h. daſs ein reelles Differential $\Sigma c_k dw_k$ entlang einer Symmetrielinie der Riemann'schen Fläche nothwendig immer in einer paaren Anzahl von Punkten verschwindet.

Man beachte zu dem Zwecke, daſs die genannten Verschwindungspunkte „Kreuzungspunkte" derjenigen überall endlichen Strömung auf unserer Fläche sind, welche zu dem reellen Theile des Integrals erster Gattung $\Sigma c_k w_k$ in dem zu Anfang dieser Vorlesung erläuterten Sinne zugehört. Aber für diese Strömung sind die einzelnen Symmetrielinien der Fläche Strömungscurven. Trägt daher eine solche Symmetrielinie einen Kreuzungspunkt der Strömung, so trägt sie auch noch einen zweiten, trägt sie drei, so gleich vier. Denn in dem bez. Kreuzungspunkten wird der Sinn der entlang der Symmetrielinie stattfindenden Strömung umkehren; Quellpunkte aber und dergl. Unstetigkeiten, welche anderenfalls die Bündigkeit unseres Schluſses beeinträchtigen könnten, sind bei der überall endlichen Strömung nicht vorhanden. Daher etc.

[Fr. 24.6.92] Wir handeln ferner davon, wie sich hier die hyperelliptischen Fälle darstellen. Bei ihnen artet die Curve der φ, wie wir aus der allgemeinen Theorie wiſsen, in eine doppelt überdeckte rationale C_{p-1}

(des R_{p-1}) aus. Nun kann eine solche Curve, wenn sie reell sein soll, bei ungeraden p sowohl nulltheilig als eintheilig sein. Ich sage aber, daſs sie nothwendig eintheilig sein muſs, wenn sie ein reelles hyperelliptisches Gebilde tragen soll. Das ist gewiſs so, wenn wir von den auf pag 140ff. betrachteten Fällen ausgehen, bei denen wir die Verzweigungspunkte der hyperelliptischen Fläche über der z-Ebene entweder reell oder paarweise conjugirt imaginär genommen haben.

Wir können sagen, daſs wir besagte Verzweigungspunkte damit auf der z. Kugel orthosymmetrisch angeordnet haben. Aber man wird fragen, ob man nicht auch ein reelles hyperelliptisches Gebilde bei diasymmetrischer Anordnung der Verzweigungspunkte vor sich hat, also wenn man die beiden über die Kugel ausgebreiteten Blätter geradezu etwa durch solche $\overline{2p+2}$ Verzweigungspunkte verbindet, welche paarweise im elementaren Sinne diametral sind. Sicher kann ich doch einen Punkt einer solchen zweiblättrigen Fläche mit einem beliebigen der beiden Punkte zusammenordnen, die ihm diametral gegenüber in dem einen oder anderen Blatte der Fläche liegen, und so zwei Transformationen Σ_1 und Σ_2 der Fläche in sich finden, die zweifellos conform sind und die Winkel umlegen.

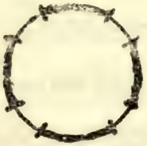
Aber wenn man die Sache näher verfolgt, so sieht man, daſs diese Σ_1 und Σ_2 nicht etwa, wie es beim reellen hyperelliptischen Gebilde sein soll, zwei unterschiedene eindeutige Transformationen der Fläche in sich vorstellen, sondern zwei *Zweige (sozusagen) einer zweideutigen Transformation*! Und eben deſshalb kommt dieses hyperelliptische Gebilde, hier wo wir allein die reellen Gebilde im elementaren Sinne des Wortes aufzählen, nicht in Betracht.

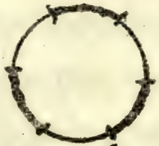
Auf der eintheiligen rationalen C_{p-1} werden wir dann je nachdem $2p+2$, $2p$, $2p-2 \ldots\ldots 2$, 0 reelle Verzweigungspunkte anzubringen haben. Ist diese Zahl >0, so zerfällt dadurch der reelle Zug der C_{p-1} in eine entsprechende gerade Zahl, sagen wir 2λ, von Theilen. Da können wir die C_{p-1} nun entweder so als Gränze einer reellen C_{2p-2} auffaſsen, daſs wir den ersten, dritten, ... $(2\lambda-1)^{\text{ten}}$ Theil doppelt überdeckt denken und den zweiten, vierten, ... $(2\lambda)^{\text{ten}}$ Theil ausfallen laſsen, oder so, daſs wir es gerade umgekehrt machen. *Die hyperelliptische Curve erscheint also (für $\lambda > 0$) als Uebergangsfall zwischen zwei nicht hyperelliptischen C_{2p-2}, welche beide λ reelle Ovale besitzen* (und die natürlich für $\lambda = 1, 2 \ldots p$ diasymmetrisch und nur für $\lambda = p+1$ orthosymmetrisch sind). Anders ist es, falls sämtliche Verzweigungspunkte imaginär sind. Um zur benachbarten C_{2p-2} zu gelangen, werden wir da entweder die ganze C_{p-1} verschwinden laſsen, das giebt uns eine nulltheilige C_{2p-2}, oder sie nach ihrer ganzen Erstreckung doppelt überdecken, was einen oder zwei getrennte Curvenzüge der C_{2p-2} liefert, je nachdem p gerade oder ungerade ist. *Die hyperelliptische Curve mit $\lambda = 0$ erscheint so als Uebergangsfall zwischen der niedersten diasymmetrischen und der niedersten orthosymmetrischen Art von C_{2p-2}.* Alles das sind natürlich nur Transscriptionen derjenigen Sätze, welche wir früher für die symmetrischen hyperelliptischen *Flächen* aufgestellt haben.

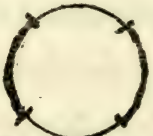
Wir betrachten jetzt die reellen Normalcurven der φ der *allgemeinen* Fälle $p = 3, 4$ etwas genauer. Bei $p = 3$ würde es sich darum handeln, die Kenntniſse, welche man von der Gestalt der ebenen Curven vierter Ordnung hat (Winterautographie p 247 ff) mit der hier entwickelten Theorie der symmetrischen Flächen in Verbindung zu setzen, bei $p = 4$ dagegen darum, von letzterer Theorie aus überhaupt erst Einsicht in die verschiedenen möglichen Gestalten derjenigen reellen Raumcurven sechster Ordnung zu gewinnen, welche der volle Schnitt einer Fläche zweiter und einer

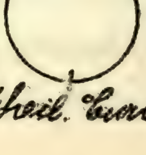
Fläche zweiter und einer Fläche dritter Ordnung sind.

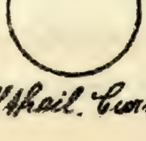
Der Vergleich bei $p = 3$ ist rasch gemacht. Wir haben haben da $\left[\frac{3p+4}{2}\right] = 6$ Arten symmetrischer Flächen, je eine mit 4, 3, 1, 0 Symmetrielinien und zwei mit 2 Symmetrielinien, und in der That lernten wir l. c. 6 Arten von ebenen Curven vierter Ordnung kennen, je eine mit 4, 3, 1, 0 Ovalen und zwei mit 2 Ovalen: die zweitheilige Curve erster Art und die Gürtelcurve. Da bliebe aber nur noch zu entscheiden, welche von diesen beiden Curven diasymmetrisch, welche orthosymmetrisch ist? Wir beantworten das mit, wenn wir zunächst wie dies unserer allgemeinen Theorie nach möglich sein muſs, die auf p. 247 der Winterautographie gezeichneten Curven sämmtlich auf reellem Wege in hyperelliptische Grenzfälle übergehen laſsen. Wir erhalten da folgende Figuren, die ohne weitere Erklärung verständlich sein werden:

I

(4 theil. Curve)

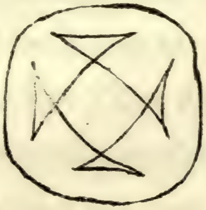
II

(3 theil. Curve)

III

(2 theil. Curve 1ter Art).

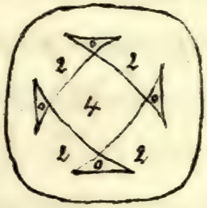
IV

(1 theil. Curve).

V VI

(nulltheil. Curve und Gürtelcurve).

Man sieht: die Gürtelcurve gehört mit der nulltheiligen Curve, d.h. dem niedrigsten diasymmetrischen Falle zusammen und repräsentirt eben darum, unserer allgemeinen Theorie zufolge, den niedrigsten orthosymmetrischen Fall. Immerhin ist intereſsant, dies direct durch Construction der zugehörigen Riemann'schen Fläche zu bestätigen. Wir ersetzen zu dem Zwecke die Gürtelcurve durch die ihr dualistisch entgegentretende Curve vierter Claſse:



und construiren nun bei ihr die hier besonders übersichtliche „projective" Riemann'sche Fläche (W.A p 254,4). Dieselbe überdeckt die Ebene so mit ihren Blättern, wie durch die Ziffern der folgenden Figur angedeutet ist:



und ist hiernach sehr leicht vorzustellen (das Nähere siehe in meinem Aufsatze in Math. Ann. 10, 1876). Und wenn man diese Fläche nun längs der reellen Curvenzüge aufschneidet, so zerfällt sie in der That in zwei Hälften, d.h. sie ist orthosymmetrisch, w. z. b. w.

[Mo. 27. 6. 92] Sehen wir nun, was wir über die Normalcurve bei $p=4$, die C_6 des R_3 (die der volle Durchschnitt einer F_2 mit einer F_3 ist) in Erfahrung bringen können. Von geometrischer Seite haben wir da zunächst die Hülfsmittel, die uns die *Modelle* der Flächen zweiter und dritter Ordnung an die Hand geben; es wird mit Hülfe dieser Modelle nicht schwer sein, für alle die in Betracht kommenden Curventypen Beispiele zu finden, während allerdings der Beweis, daſs es nur eine bestimmte Reihe Curventypen giebt, auf diesem Wege nur schwer zu führen sein dürfte. Wir haben ferner die Möglichkeit, die C_6 in der ebenen Abbildung der F_2 zu construiren. Ist die F_2 nulltheilig, so ist es auch die C_6, diesen Fall mögen wir ohne Weiteres als erledigt ansehen. Die übrigen reellen F_2 gestatten je reelle Abbildungen auf die Ebene, wobei die auftretenden 3 Fundamentalpunkte reell oder imaginär sein werden, je nachdem die reelle F_2 geradlinig oder nicht geradlinig ist. Nun wird es darauf ankommen in der Bildebene alle C_6 zu zeichnen, welche die beiden Fundamentalpunkte zu dreifachen Punkten haben.

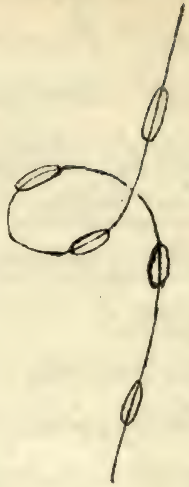
Doch knüpfen wir an die Theorie der symmetrischen Flächen! Wir erfahren da sofort, daſs es acht Arten unserer C_6 giebt, nämlich

fünf „diasymmetrische" Arten bez. mit 0, 1, 2, 3, 4 reellen Zügen
drei „orthosymmetrische" Arten mit 1, 3, 5 reellen Zügen.

Laſsen wir da den mittelsten orthosymmetrischen Fall bei Seite, so müſsen die übrigen 7 Arten sich alle aus den entsprechenden hyperelliptischen Vorkommniſsen ableiten laſsen.

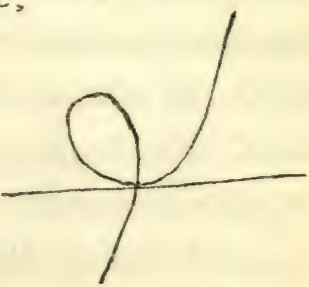
Nehmen wir etwa zunächst die hyperelliptischen Fälle $p=4$ mit 2, 4, 6, 8, 10 reellen Verzweigungspunkten. Die Normalcurve der φ ist da eine doppeltzählende Curve 3. Ordnung, deren beide Ueberdeckungen in 2, 4, 6, 8, 10 reellen Punkten zusammenhängen. Die Curve erscheint durch diese Punkte in 2, 4, 6, 8, 10 Segmente zerlegt. Wir vertheilen diese Segmente auf 2 Serien in der Art, daſs wir aneinanderstoſsende Segmente verschiedenen Serien zuweisen. Da werden wir dann nach Belieben die Segmente der einen Serie in schmale Ovale übergehen und die Segmente der anderen Serie verschwinden laſsen, oder umgekehrt. Jedesmal erhalten wir die schematische Figur einer möglichen C_6. Diese C_6 enthält jenachdem

1, 2, 3, 4, 5 Ovale und ist natürlich (von dem letzten Falle der 5 Ovale abgesehen) diasymmetrisch. Vergl. die nebenstehende Figur, die den Fall der 5 Ovale erläutert.

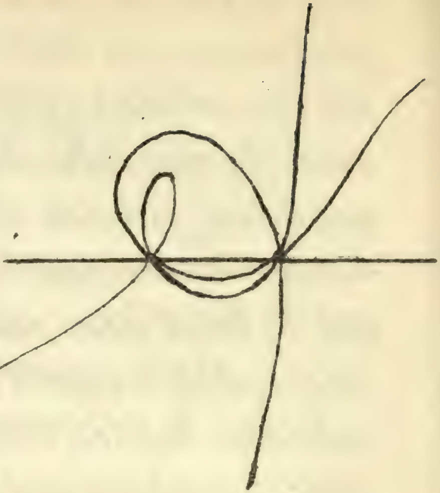


Wir betrachten ferner den hyperelliptischen Fall ohne reelle Verzweigungspunkte. Die Normalcurve ist da eine Raum-C_3, welche schlechtweg doppelt überdeckt ist.
Von da kommen wir dann einerseits zur nulltheiligen C_6 (also dem niedrigsten diasymmetrischen Fall), indem wir die C_3 einfach verschwinden laſsen, andererseits aber zu derjenigen eintheiligen C_6, welche den niedersten orthosymmetrischen Fall vorstellt, indem wir die C_3 nach ihrer ganzen Erstreckung in zwei nebeneinander herlaufende Curvenzüge (die schlieſslich, zusammengenommen, nur einen einzigen Curvenzug ausmachen), spalten.

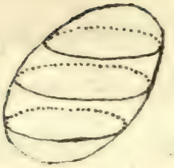
Es scheint mir wichtig, daſs wir uns diese letztere C_6 noch besonders als den Schnitt einer F_2 mit einer F_3 klar machen. Im hyperelliptischen Falle ist die F_2 (welche eine F_3 nach Erstreckung der räumlichen C_3 berühren muſs) nothwendig ein Kegel (und zwar, weil es sich um eine reelle C_3 handelt, ein reeller, eintheiliger Kegel.) Denn sonst würde der Schnitt von F_2 und F_3, wie wir schon früher hervorhoben (p. 147) unmöglich in eine doppeltzählende C_3 ausarten können. Dieser Kegel ist irgendeiner von denen, die von den durch einen festen Punkt der C_3 hindurchgehenden Secanten der C_3 gebildet werden; die C_3 läuft also durch die Kegelspitze. Daher erhält man, wenn man den Kegel in üblicher Weise stereographisch auf die Ebene überträgt, die nebenstehende Figur; in ihr sind die beiden unendlich nahe aneinander gerückten Fundamentalpunkte, welche bei der Abbildung des Kegels entstehen, markirt und der gröſseren Deutlichkeit halber auch noch die Verbindungsgerade derselben besonders gezeichnet. Geht jetzt unsere C_3 in die eintheilige (orthosymmetrische) C_6 über, so ist nothwendig, daſs sich der Kegel in ein einschaliges Hyperboloid verwandelt, denn ein zweischaliges Hyperboloid würde den an der ganzen C_3 entlang laufenden Curvenzug unmöglich enthalten können.

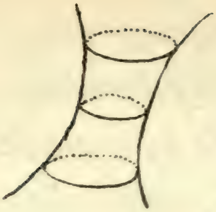


In der Abbildung rücken also jetzt die beiden Fundamentalpunkte in zwei reelle Punkte auseinander. Gleichzeitig verwandelt sich unsere C_3 durch Spaltung entlang ihrer ganzen Erstreckung in eine C_6, welche durch jeden dieser Fundamentalpunkte einmal hindurchgeht. Wir kommen so zu der nebenstehenden Figur, die nun noch rückwärts auf das einschalige Hyperboloid im Raume übertragen werden sollte.



Endlich haben wir noch die *orthosymmetrischen Curve mit 3 Zügen* zu construiren. Da haben wir zunächst nur die negative Vorschrift, daſs es sich um eine Curve handeln soll, welche sich auf reellem Wege *nicht* in eine hyperelliptische C_3 überführen läſst. Es wird darauf ankommen, durch besonderen Ansatz eine dreitheilige C_6 zu construiren, welche dieser negativen Vorschrift genügt. Und das gelingt sofort, wenn wir z. B. ein Ellipsoid oder auch irgend ein Hyperboloid mit dem Aggregate dreier Parallelebenen $pqr = 0$ zusammenstellen, wie es durch folgende Figuren erläutert wird:





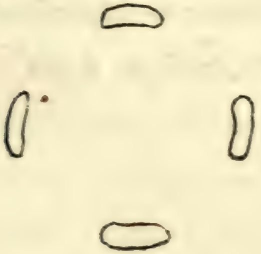
und nun an Stelle von $pqr = 0$ vielleicht $pqr = \varepsilon$ setzen, unter ε eine kleine Grösse verstanden, also das Tripel der Ebene durch eine in der Nähe verlaufende eigentliche Fläche dritter Ordnung ersetzen. *Unsere Curve besteht, wie man sieht, aus drei sich wechselseitig einschliessenden Ovalen*, ich werde sie, in Ermangelung eines anderen Namens, kurz als *Trippelcurve* bezeichnen.

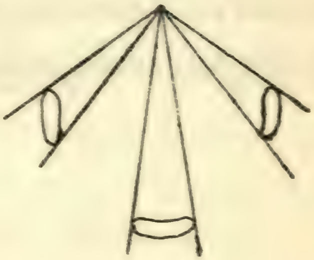
Wir haben so über die Gestalten der verschiedenartigen C_6 wenigstens eine erste Uebersicht. [Di. 28.6.92.] Wollen wir die erhaltenen Resultate, wie auch die auf die ebenen C_4 bezüglichen, jetzt noch insoweit einer Controle unterwerfen, als wir die „*Doppelpunktmethode*" heranziehen. Man überlege sich zunächst, dass die C_{2p-2} des R_{p-1}, wenn sie einen Doppelpunkt erhält (womit ihr Geschlecht um 1 sinkt); von diesem Doppelpunkte auf den R_{p-2} projicirt in diesem eine C_{2p-4} ergeben wird, die die Normalcurve der φ für das Geschlecht $(p-1)$ vorstellt. Nun können wir bei einer reellen, nicht nulltheiligen C_{2p-2} einen Doppelpunkt dadurch herstellen, (wie wir früher schon aus der Theorie der symmetrischen Flächen schloſsen), daſs wir irgendeinen ihrer reellen Züge zu einem Punkte zusammenziehen.

Die entstehende symmetrische Fläche vom Geschlechte $(p-1)$ wird $(\lambda-1)$ reelle Züge besitzen und orthosymmetrisch oder diasymmetrisch sein, je nachdem es die ursprüngliche Fläche war. Wir müſsen da nun den orthosymmetrischen Fall mit $\lambda = 1$ ausnehmen, bei welchem bei Zusammenziehen der Symmetrielinie ein Zerfallen der Riemann'schen Fläche eintritt, worauf sich Verhältniſse einstellen, die einer besonderen Diskuſsion bedürfen. Indem wir dies Alles zusammenfaſsen, werden wir folgendermaſsen sagen:

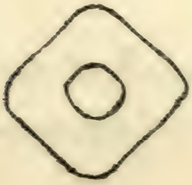
Ausgenommen den orthosymmetrischen Fall $\lambda = 1$ (der natürlich nur bei geraden p möglich ist) kann bei jeder unserer Normalcurven (p, λ) jeder einzelne Curvenzug zu einem isolirten Doppelpunkte reell zusammengezogen werden, und die Projection der Curve von diesem Punkte aus auf den R_{p-2} giebt dort diejenige Normalcurve $(p-1, \lambda-1)$, welche mit der ursprünglichen Curve gleichen Character besitzt (d.h. orthosymmetrisch oder diasymmetrisch ist, je nachdem es die ursprüngliche Curve war). Diesen Satz mögen wir nun an ein paar Beispielen $p = 3, 4$ prüfen.

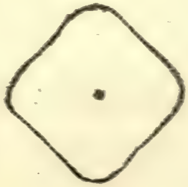
Man beginne etwa mit der viertheiligen ebenen C_4, bei der wir das obere Oval in einen Punkt zusammenziehen, wie nachstehende Figur erläutert:



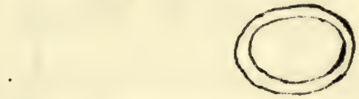


Die Bestätigung unseres Satzes liegt hier darin, dass von dem isolirten Doppelpunkte aus sechs reelle Tangenten an die Curve möglich sind (so daſs bei der Projection auf eine doppeltzählende Gerade wirklich sechs reelle Verzweigungspunkte hervorkommen). Wir betrachten ferner die Gürtelcurve vierter Ordnung. Indem wir das innere Oval zum isolirten Punkte zusammenziehen erhalten wir eine eintheilige Curve $p = 2$, bei welcher vom Doppelpunkte aus keine reelle Tangente an die Curve geht:

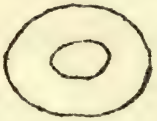


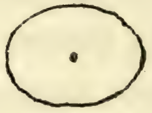


auch dieses stimmt. Aber wieso ist es möglich, bei der Gürtelcurve das äuſsere Oval zum isolirten Punkte zusammenzuziehen? Ganz einfach so, daſs man dasselbe zuerst mit dem engeren Ovale zusammenfallen läſst, (was der zugehörige hyperelliptische Fall $p = 3$ ist):

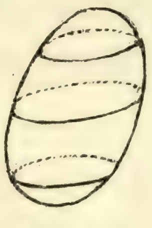


und es dann noch mehr einschrumpfen läſst (worauf dasselbe jetzt seinerseits das eingeschloſsene Oval vorstellt):

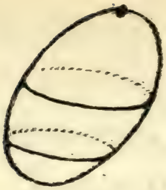




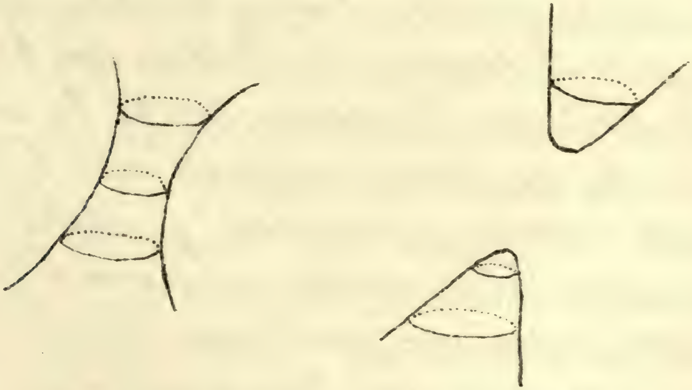
Man nehme ferner als Beispiel der Normalcurve sechster Ordnung $p = 4$ die Tripelcurve, die auf einem elipsoide liegt:



Da hat es keine Schwierigkeit, das obere Oval, bei festgehaltenem elipsoid, auf einen Punkt zusammenzuziehen:



Und projiciren wir nun die Curve von diesem Punkte aus auf eine Ebene, so entsteht dort als Curve vierter Ordnung richtig eine Gürtelcurve, d.h. eine orthosymmetrische Curve mit je zwei Zügen. Wollen wir aber bei der Tripelcurve unserer Figur das mittlere Oval zu einem Punkte zusammenziehen, so würden wir unser Ellipsoid zuerst in ein einschaliges, dann in ein zweischaliges Hyperboloid übergehen lassen, wie nachstehende Figur erläutert:



und da es dann ersichtlich keine Schwierigkeit gerade das mittlere Oval in einen Punkt zusammenzuziehen.

Wir wenden uns jetzt, betreffs unserer reellen Normalcurven der φ, zur Discussion eines besonderen Realitätsproblems. Es soll sich darum handeln, *diejenigen Ebenen des R_{p-1} aufzusuchen*:

$$\Sigma c_k \varphi_k = 0,$$

– wir nennen dieselben kurz Φ, *welche unsere C_{2p-2} in $(p-1)$ Punkten je einfach berühren*. Der Constantenzählung nach wird es bei beliebigem p eine *endliche* Zahl solcher Φ geben. Das sind bei $p=3$ *Doppeltangenten* der Curve 4. Ordnung, bei $p=4$ die *dreifachen Tangentenebenen* der C_6, bei $p=2$ (um diesen Fall doch nicht auszulassen) *die Verzweigungspunkte* der doppelt überdeckten Geraden.

Wir müssen vor allen Dingen berichten, welche hervorragende Bedeutung das Problem der Φ in der Theorie der Abel'schen Functionen besitzt. Es seien $v_1, v_2, \dots\dots v_p$ die Normalintegrale erster Gattung, welche zu der irgendwie „kanonisch" zerschnittenen Riemann'schen Fläche gehören, und wir schreiben insbesondere, indem wir zwei Punkte x und y der Fläche als obere und untere Gränze einführen:

$$v_1 = \int_y^x dv_1, \quad v_2 = \int_y^x dv_2, \quad \dots\dots\dots \quad v_p = \int_y^x dv_p$$

Die so bestimmten $v_1, v_2 \ldots\ldots v_p$ wollen wir dann in die zugehörigen 2^{2p} Thetafunctionen einsetzen:

$$\vartheta_{\substack{g_1\, g_2 \ldots\ldots g_p \\ h_1\, h_2 \ldots\ldots h_p}} (v_1, v_2, \ldots\ldots\ldots v_p),$$

die durch die bekannten Reihenentwickelungen definirt sein mögen (die wir hier nicht weiter explicite angeben); die $g_1 \ldots\ldots g_p, h_1 \ldots\ldots h_p$ sind dabei $2p$ Indices, deren jeder die Werthe 0 oder 1 annehmen kann. Wir nennen eine solche ϑ, Function gerade oder ungerade, jenachdem

$$g_1 h_1 + g_2 h_2 + \ldots\ldots\ldots g_p h_p \begin{Bmatrix} \equiv 0 \\ \equiv 1 \end{Bmatrix} (\mathrm{mod.}\, 2).$$

Und nun wird man fragen, wie die hiermit eingeführten 2^{2p} Functionen der beiden Flächenpunkte x, y sich an der Curve der φ darstellen mögen? Was die geraden ϑ angeht [deren Anzahl $= 2^{p-1}[2^p+1]$ ist], so müssen wir auch jede Andeutung über die da zugebende Antwort bis auf Weiteres verschieben. Was aber die ungeraden ϑ betrifft, deren Anzahl $= 2^{p-1}[2^p-1]$ wird, so steht die Frage bei ihnen in engster Beziehung zu unserem Problem der Φ. Einem jeden ungeraden ϑ erscheint nämlich bei gegebener Zerschneidung der Riemann'schen Fläche ein bestimmtes Φ eindeutig zugeordnet und man hat dann, unter $\Phi(x)$, $\Phi(y)$ die

Werthe verstanden, welche ϕ an den Stellen x, y annimmt, die einfache Formel

$$\vartheta \begin{matrix} g_1 \ldots\ldots g_p \\ h_1 \ldots\ldots h_p \end{matrix} (v_1 \ldots\ldots v_p) . \sqrt{\phi(x)} . \sqrt{\phi(y)} . \Omega(x, y);$$

$\Omega(x,y)$ soll dabei die Primform unseres algebraischen Gebildes bezeichnen. *Das Problem der ϕ und die Discussion der bei ihm auftretenden Realitätsverhältnisse hat hiernach die unmittelbarste Beziehung zur Lehre von den Abel'schen Functionen.* (Man bezeichnet geradezu wohl die $\sqrt{\phi(x)}$ als Abel'sche Functionen im engeren Sinne). Wir haben das hier vorausgeschickt, um das Interesse zu kennzeichnen, welches die nähere Untersuchung der ϕ besitzt; später wenden wir umgekehrt die Lehre von den Abel'schen Functionen, bez. den ϑ Functionen benutzen, um die Theorie der ϕ zu Ende zu führen.

[Do. 30. 6. 92.] Die Anzahl der ungeraden ϑ ist, wie wir beiläufig bemerkten

$$2^{p-1}(2^{p}-1).$$

Ebenso groß ist also (wenn wir einstweilen von allen Ausnahmefällen absehen, die wir später discutiren) die Zahl der ϕ, also für $p=2,3,4$ bezw. 6, 28, 120, wie uns bereits von anderer Seite wohlbekannt ist. Wir wollen doch zusehen, welche elementaren Mittel uns zur Verfügung stehen, um für $p=3,4$ diese Zahlen zu gewinnen, bez. bei größerem p die Zahl zu finden.

Wir erläutern dies um so lieber, als wir die gleichen

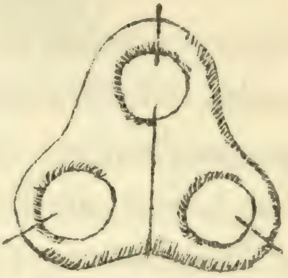
Ansätze hernach bei der Realitätsdiscuſsion gebrauchen werden.

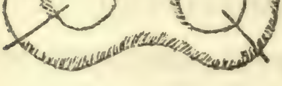
1. Um abzuzählen, daſs bei $p = 3$ 28 Doppeltangenten vorhanden sind, wird man sich zunächst der Plücker'schen Formeln bedienen oder auch das Correspondenzprincip verwenden können: sei es in seiner ursprünglichen (Chasles'schen) Form, sei es, unter Verlegung der Abzählung auf die Curve vierter Ordnung selbst, in der Cayley-Brill'schen Gestalt.

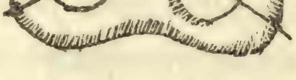
Andererseits erweist sich hier als besonders einfach die „hyperelliptische Methode". Indem wir die Curve 4. Ordnung in den hyperelliptischen Fall, d.h. einen doppeltzählenden Kegelschnitt mit 8 Scheiteln, übergehen laſsen, verwandeln sich die Doppeltangenten in die Verbindungsgeraden der Scheitel, und das sind gerade $\frac{8\cdot7}{1\cdot2} = 28$.

Endlich führt auch die „Doppelpunktsmethode" zum Ziel, und zwar in mannigfachster Weise. Ich betone dabei gern, daſs all' den verschiedenen Möglichkeiten, die sich darbieten, um einer Curve vierter Ordnung einen oder mehrere Doppelpunkte zu ertheilen, entsprechende Abschnürungsprozeſse bei der zugehörigen Riemann'schen Fläche parallel laufen und umgekehrt.

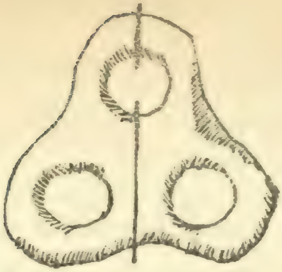
So entspricht der Möglichkeit, daſs die C_4 in zwei Kegelschnitte zerfällt (und damit 4 Doppelpunkte bekom̄t), daſs man eine Riemann'sche Fläche $p=3$ durch 4 „Abschnürungen" in zwei Stücke vom Geschlechte $p=0$ zerlegen kann, vergl. die nebenstehende Figur. Eine Curve vierter Ordnung mit 3 Doppelpunkten kann entweder eine irreducible Curve vom Geschlechte Null oder das Aggregat einer allgemeinen Curve dritter Ordnung (vom Geschlechte 1) und einer geraden Linie sein. Entsprechend laſsen sich bei der Riemañ'schen Fläche $p=3$ drei Abschnürungen nebeneinander auf zweierlei Weisen anbringen.







Oder um ein umgekehrtes Beispiel etwas schwieriger Art zu geben: man zerlege die Riemann'sche Fläche, wie in der nachfolgenden Figur geschieht, durch zwei Abschnürungen in zwei gleichberechtigte Bestandtheile vom Geschlechte 1:



Das wird dann zwei „elliptische" Curven zweiter Ordnung geben müſsen, die sich in zwei Punkten überkreuzen! Aber eine elliptische Curve zweiter Ordnung ist nothwendig eine doppelüberdeckte Gerade mit 4 Scheiteln, unsere Curve vierter Ordnung ist in zwei Gerade dieser Art ausgeartet.

Alle die so entstehenden Gränzfälle können nun zur Abzählung der 28 Doppeltangenten herangezogen werden. Dabei wird man indeſs in Complicationen hineingerathen, sobald es sich (wie in unserem letzten Beispiele) um Gränzfälle handelt, bei denen gerade Linien als Bestandtheile der Curve 4ter Ordnung auftreten.

Wie oft soll man diese Linien selbst als Doppeltangenten zählen? Wir wollen das bei Seite laſsen und von den anderen Fällen vielleicht den, wo die C_4 in zwei Kegelschnitte zerfällt, ausführlicher betrachten. Die beiden Kegelschnitte haben 4 gemeinsame Tangenten, die als solche Doppeltangenten der Curve 4ter Ordnung vorstellen. Ferner haben ihre 4 Schnittpunkte 6 Verbindungsgeraden. Und von diesen muſs man jede, wie leicht zu sehen, für 4 Doppeltangenten zählen. Das giebt 4+6.4 die richtige Summe 28.

Ich richte nun insbesondere die Aufmerksamkeit auf den einfachen Fall, die Curve vierter Ordnung mit *einem* Doppelpunkte. Die Verhältniſse, die bei ihr auftreten, finden sich nämlich mutatis mutandis weiterhin bei beliebigem p wieder. Von dem Doppelpunkte aus projicirt sich die C_4 als doppeltüberdeckte Gerade vom Geschlechte $p = 2$. Eine solche Gerade hat 6 „Scheitel", daher vom Doppelpunkte an die Curve vierter Ordnung 6 Tangenten gehen. Dieselben vertreten augenscheinlich 2.6 der im allgemeinen Falle der Curve 4ter Ordnung vorhandenen Doppeltangenten. Soll also die Zahl 28 voll werden, so müſsen wir noch nachweisen, *daſs die C_4 mit 1 Dp. 16 nicht durch den Doppelpunkt laufende Doppeltangenten besitzt.* Und diesen Nachweis werden wir später wieder mit Hülfe der Abel'schen Functionen führen.

Der Fortschritt, der hier erzielt ist, ist aber der: um die Zahl 28 der Doppeltangenten überhaupt abzuzählen, bedarf man der Theorie der Thetafunctionen und damit der Kenntniſs der höheren Theile der Theorie der Abel'schen Functionen. Hingegen wird, um die Zahl 16 der nicht durch den Dp. laufenden Doppeltangenten des besondenen Falles festzulegen, die bloſse Lehre, vom Jacobi'schen Umkehrproblem, d.h. der elementare Theil der Theorie der Abel'schen Functionen genügen.

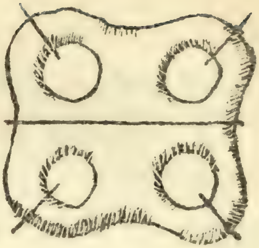
2. Gehen wir nun zu $p=4$. Da werden wir Alles in Allem ganz ähnliche Betrachtungen anstellen können.

Erstlich können wir bei gegebener C_6 des R_3 die Zahl der dreifachen Ebenen direct durch das Correspondenzprincip bestimmen. Ich darf mich hier darauf beschränken, auf die bez. Angaben zu verweisen, die ich zu Anfang des Sommersemesters über die hierher gehörigen Untersuchungen von Cayley, Zeuthen und Brill gemacht habe. Die Theorie ist nicht schwierig, aber einigermaſsen umständlich.

Sehr viel einfacher kommen wir zum Ziele, wenn wir zweitens wieder die „hyperelliptische Methode" heranziehen. Man laſse die C_6 in eine doppeltzählende Raumcurve dritter Ordnung mit 10 Scheiteln ausarten, da werden die gesuchten 120 dreifachen Tangentialebenen einfach durch die 120 Ebenen geliefert, welche 3 der 10 Scheitel enthalten ($\frac{10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3} = 120$.

Wir wenden uns drittens zur „Doppelpunktmethode"

Um da doch auch wieder ein Beispiel einer zerfallenden C_6 zu geben, beachte man die Möglichkeit die Riemann'sche Fläche $p=4$ durch 5 Abschnürungen in zwei gleichberechtigte Theile vom Geschlechte Null zu verwandeln. Dementsprechend muſs die Raumcurve sechster Ordnung in zwei Raumcurven dritter Ordnung zerfallen können, welche sich in 5 Punkten treffen. Man bestätigt das direct geometrisch, wie ich kaum auszuführen habe (der Schnitt von F_3 und F_2 kann, wenn er in 2 Curven dritter Ordnung zerfallen soll, nur solche 2 Curven liefern, von denen die eine die graden Linien erster Erzeugung, die andere die geraden Linien zweiter Erzeugung der F_2 zu Secanten hat; derartige 2 Curven schneiden sich aber auf der F_2 in fünf Punkten). Da ist denn die Abzählung der 120 dreifachen Tangentenebenen diese: Von jedem der 5 Schnittpuncte aus projiciren sich die beiden C_3 als zwei Kegelschnitte.



Daher gehen durch jeden der 5 Schnittpuncte vier gemeinsame Tangentenebenen an die beiden C_3. Dieselben sind, weil sie je durch einen Doppelpunkt der ausgearteten C_6 laufen, als dreifache Tangentenebenen der C_6 doppelt zu zählen. Das giebt $5.4.2 = 40$ dreifache Tangentenebenen. Die übrigen 80 werden durch die $\frac{5.4.3}{1.2.3} = 10$

Ebenen geliefert, welche durch 3 der 5 Punkte durchlaufen, und von denen jede, eben weil sie 3 der Punkte enthält, 8-fach zu zählen ist.

Viel wichtiger für die Folge aber ist, daſs wir die Abzählung wieder bei der C_6 mit nur einem Doppelpunkte in Ansatz bringen. Von dem Dp. aus projicirt sich die C_6 als ebene C_4 (vom Geschlechte 3) und diese hat 28 Doppeltangenten. Damit haben wir 2. 28 = 56 dreifache Tangentialebenen der allgemeinen C_6. Es bleibt also nun nachzuweisen, daſs 120 - 56 = 64 dreifache Tangentialebenen der Curve mit Doppelpunkt vorhanden sind, welche *nicht* durch den Doppelpunkt gehen! Das ist wieder die Aufgabe, welche in relativ elementarer Weise durch die Theorie der Abel'schen Functionen gelöst werden wird.

.1. f. 92] 3. Wir nehmen endlich $p = 5$ und überhaupt $p > 4$.

Da können wir denn alle die vorbezeichneten Ansätze ebenfalls versuchen, aber dieselben führen zu mehr oder minder groſsen Complicationen mit Ausnahme allein der einfachen Doppelpunktmethode. Eben deſshalb haben wir die letztere bereits vorstehend mit besonderem Nachdruck hervorgehoben.

Zunächst könnte man die Abzählung wieder direct durch Anwendung des Correspondenzprincips versuchen. Das sollte theoretisch sehr wohl durchführbar sein, aber es wird sehr umständlich, und es ist wohl noch von keiner Seite gemacht.

Viel größer sind die Schwierigkeiten, auf welche zweitens die hyperelliptische Methode führt. Die Zahl der viermal berührenden R_3 ist bei der C_8 des Geschlechtes 5 nach der allgemeinen Theorie $2^4(2^5-1) = 496$. Man lasse jetzt die C_8 in eine doppeltzählende (rationale) C_4 mit 12 Scheiteln ausarten und bestimme bei ihr die Zahl der durch 4 Scheitel gehenden R_3. Das giebt $\frac{12.\,11.\,10.\,9}{1.\,2.\,3.\,4} = 495$. Wo ist die 496te Lösung geblieben? Das ist ohne Weiteres gar nicht zu sehen. Von der Theorie der ϑ aus werden wir später lernen, daß sie unbestimmt geworden ist und durch die $\infty^2 R_3$ vertreten wird, welche die C_4 in irgend zwei Punkten berühren. Weßhalb hier aber diese $\infty^2 R_3$ als eine Lösung mitgerechnet werden müssen, während wir doch im hyperelliptischen Falle $p=3$ die Tangenten des doppeltzählenden Kegelschnittes keineswegs als eine Lösung mitgerechnet haben, ist von vornherein gar nicht zu sehen. Wir werden hier also auch die allgemeine Zahl 496 der Φ nicht so abzählen können, daß wir vom hyperelliptischen Falle beginnen, wir werden vielmehr zufrieden sein müssen, wenn wir das abweichende Verhalten des hyperelliptischen Falles in die allgemeine Theorie hinterher einzuordnen vermögen.

Wollen wir nun drittens die „Doppelpunctmethode" in der Ausgestaltung heranziehen, in der sie auf zerfallende Curven führt, so ist auch das nicht ohne Weiteres zu Ende zu bringen. Man lasse die C_8 des Geschlechtes $p = 5$ in 2 rationale C_4 zerfallen, die sich in 6 Puncten treffen. Da giebt es denn 15 R_3, welche durch 4 der Puncte laufen. Wir haben damit $15 . 16 = 240$ Φ. Aber wie weisen wir die übrigen 256 Φ nach? Das erscheint nicht ganz einfach.

So kommen wir denn in der That dazu, vor allen Dingen die „einfache" Doppelpunctmethode in Ansatz zu bringen. Möge die C_{2p+2} des Geschlechtes p einen Doppelpunct bekommen (so zwar, wie wir der Genauigkeit halber zufügen mögen, dass sie irreducibel bleibt, ihr Geschlecht also auf $\overline{p-1}$ sinkt). Indem wir vom Doppelpuncte aus projiciren, entsteht im R_{p-2} die Normalcurve des Geschlechtes $p-1$. Wir nehmen an, dass für diese die Zahl der überall berührende Φ des Geschlechtes p also $2^{p-1}(2^{p-1}-1)$. Es bleiben noch $2^{p-1}(2^{p}-1) - 2^{p-1}(2^{p-1}-1)$, d.h. 2^{2p-2} nachzuweisen. Dass unsere C_{2p-2} mit Doppelpunct 2^{2p-2} überall berührende Φ besitzt, welche nicht durch den Doppelpunct laufen, dieses zu zeigen, das ist jetzt die Aufgabe. Und die werden wir wieder mit Hülfe der erſten Anſätze aus der Theorie der Abel'schen Functionen zur Erledigung bringen.

[Mo. 4. 7. 92] Die vorstehend gegebenen Erläuterungen über die Abzählung der überhaupt vorhandenen reellen ϕ sollten uns gewiſse Methoden geläufig machen, die wir nun insbesondere zur Abzählung der jeweils vorhandenen reellen ϕ gebrauchen wollen. Ich werde hier betreffs der letzteren vor allen Dingen das Resultat angeben, welches ich neuerdings in den Göttinger Nachrichten veröffentlichte (1892, N:o 9). Von den $p-1$ Berührungspunkten einer ϕ kann irgend welche gerade Zahl imaginär sein, und die reellen unter ihnen werden sich irgendwie auf die λ Züge unserer Normalcurve vertheilen. Gesetzt nun, daſs wir die Curve irgendwie continuirlich abändern, ohne sie aus ihrer Art heraustreten zu laſsen, also ohne bei ihr einen Doppelpunkt entstehen zu laſsen, so werden auf einem Curvenzuge, der mehrere Berührungspunkte trägt, gerne zwei derselben zusammenrücken und imaginär werden können, es werden ebensowohl zwei neue Berührungspunkte aus dem Imaginären hinzukommen können. Dagegen ist unmöglich, daſs zwei reelle ϕ miteinander zusammenfallen und dann verschwinden, oder daſs zwei neue ϕ aus dem Imaginären kommend hinzutreten. Denn wie soll bei einer Curve ohne

Doppelpunkt eine mehrfach zählende Φ beschaffen sein?

Sie müßte in mehr als $p-1$ Punkten berühren oder in einigen der $p-1$ Punkte mehrfach berühren, und das ist doch nicht möglich, da sie überhaupt nur in $2p-1$ Punkten schneidet. Jede einzelne reelle Φ bleibt also bei der Abänderung der Curve (so lange wir nicht zu einer anderen Curvenart übergehen) reell, und was ihre Berührungspunkte angeht, so werden diejenigen Curvenzüge, welche anfänglich in einer unpaaren Zahl von Punkten berührt werden, diese ihre Eigenschaften ungeändert beibehalten, wie ebenso auch die Curvenzüge, welche von Anfang an eine *paare* Zahl von Berührungspunkten enthielten. Ich will daraufhin diejenigen reellen Φ, welche μ verschiedene Curvenzüge mit einer unpaaren Zahl von Punkten berühren, als Φ_μ bezeichnen, und diejenigen Φ_μ als eine „Art" von Φ_μ zusammenfassen, die zu den nämlichen μ Zügen gehören. Die Zahl μ unterliegt dabei gewissen selbstverständlichen Beschränkungen. *Erstlich kann μ bei geradem p nur ungerade, und bei ungeradem p nur gerade sein,* denn es kann sich μ von der Gesammtheit der im algebraischen Sinne vorhandenen Berührungspunkte, also von $p-1$, doch nur um eine gerade Zahl unterscheiden). *Zweitens ist μ an die beiden Ungleichungen gebunden:* $\mu \leqq \lambda$, $\mu \leqq p-1$, (denn es giebt nicht mehr als λ Curvenzüge und als $p-1$ Berührungspunkte). Und nun finde ich folgendes Resultat:

Von jeder Art von Φ_μ, welche den angegebenen Beschränkungen nach überhaupt möglich sind, existiren im diasymmetrischen Falle allemal genau 2^{p-1}.

Im orthosymmetrischen Falle ist es genau so, nur daß die Art mit $\mu = \lambda$ in Wegfall kommt.

Man beachte, was dieses Verhalten der orthosymmetrischen Curven angeht, daß bei ihnen λ in der That eine Zahl ist, die von $p-1$ um ein Vielfaches von 2 abweicht. Eine diasymmetrische Curve mit ebensovielen Zügen wird also reelle $2^{p-1}\Phi_\lambda$ besitzen. Wir haben damit das bisher vermißte Unterscheidungszeichen gefunden, durch welches man bei einer vorgegebenen Curve mit λ Zügen (sofern dies überhaupt zweifelhaft sein kann, d.h. sofern λ sich von $p-1$ um ein Multiplum von zwei unterscheidet) beurtheilen kann, ob eine diasymmetrische oder orthosymmetrische Curve vorliegt, ohne daß man dieserhalb nöthig hätte, auf die zugehörige Riemann'sche Fläche zu recurriren: die Curve ist diasymmetrisch, sobald man auch nur eine Φ construiren kann, welche alle ihre λ Züge unpaarzahlig berührt, orthosymmetrisch, sobald dies unmöglich ist. In diese Regel ordnet sich dann auch die orthosymmetrische Curve mit

$(p+1)$ Zügen mit ein; bei ihr ist die Existenz irgendwelcher Φ, welche sämmtliche Curvenzüge unpaarzahlig berührte, ja von vorneherein ausgeschlossen.

Wir wollen doch, ehe wir zum Beweise des aufgestellten Satzes schreiten, die Gesammtzahl, reeller Φ constatiren, welche ihm zufolge bei der einzelnen Curve vorhanden sein muss. Da haben wir zunächst:

Bei $\lambda = 0$ giebt es 0 der 2^{p-1} reelle Φ, jenachdem p gerade oder ungerade ist. In der That kann es ja für $\lambda = 0$ nur Φ_0 geben, und diese treten nur bei ungeradem p auf. Ferner:

Im diasymmetrischen Fall $\lambda > 0$ giebt's $2^{p+\lambda-2}$ reelle Φ. Nämlich bei geradem p (wo die $\Phi_1, \Phi_2 \ldots\ldots$ in Betracht kommen):

$$2^{p-1}\left(\binom{\lambda}{1}+\binom{\lambda}{3}+\binom{\lambda}{5}+\ldots\ldots\right) = 2^{p-1}\left(\frac{(1+1)^{\lambda}-(1-1)^{\lambda}}{2}\right)$$
$$= 2^{p-1}\cdot 2^{\lambda-1},$$

und bei ungeradem p (wo die $\Phi_0, \Phi_2, \ldots\ldots$ berücksichtigt sein wollen):

$$2^{p-1}\left(1+\binom{\lambda}{2}+\binom{\lambda}{4}+\ldots\ldots\right) = 2^{p-1}\left(\frac{(1+1)^{\lambda}+(1-1)^{\lambda}}{2}\right),$$

d.h. ebenfalls $= 2^{p-1}\cdot 2^{\lambda-1}$.

Endlich aber:

Im orthosymmetrischen Falle giebt's $2^{p-1}(2^{\lambda-1}-1)$ reelle Φ. Die Abzählung ist nämlich genau, wie im diasymmetrischen Falle, nur dass hinterher von der genommenen Gesammtzahl 2^{p-1} abzuziehen ist, weil die Kategorie, $\mu = \lambda$ in Wegfall kommt.

Was nun den Beweis des aufgestellten Hauptsatzes angeht, so kann ich den durch die elementaren Continuitätsbetrachtungen, die uns hier zur Verfügung stehen, wieder nur zum Theil erbringen, den Rest müssen wir auf die Theorie der Abel'schen Functionen hinüberschieben. Wir beginnen wieder mit den niederen Fällen $p = 2, 3, 4$, bei denen Alles unmittelbar klar ist, und bei denen wir daher um so leichter die Ueberlegungen vorbereiten können, welche wir bei beliebigem p benutzen wollen.

1.) Bei $p = 2$ sind die Φ, wie wir wissen, die Verzweigungspunkte der zweiblättrigen Riemann'schen Fläche. Insofern dieselben reell sind (einem reellen Curvenzuge angehören) sind sie als Φ_1 zu bezeichnen.

Da soll es denn unserem allgemeinen Satze zufolge geben:

in den diasymmetrischen Fällen $\lambda = 0,\ 1,\ 2$
$0,\ 2,\ 4\ \Phi_1,$
und in den orthosymmetrischen Fällen $\lambda = 1,\ 3$
$0,\ 6\ \Phi_1,$

was ersichtlich richtig ist.

2.) Bei $p = 3$ handelt es sich um die Realität der Doppeltangenten der ebenen Curve vierter Ordnung. Wir haben schon auf pag. 247 der Winterautographie die Sätze kennen lernen, welche *Zeuthen* betreffs derselben in Annalen 7 aufgestellt hat. Genau diese Zeuthen'schen Sätze finden wir hier wieder. Wir haben zwischen Φ_0 und Φ_2 zu unterscheiden: das sind genau Zeuthen's Doppeltangenten der ersten und der zweiten Art. Von Doppeltangenten Φ_0, wird's allemal 4 geben, von Doppeltangenten Φ_2 aber für jedes Paar von Ovalen, welches sich bei der Curve vorfindet, ebenfalls 4, ausgenommen allein die Gürtelcurve, welche mit ihren 2 Zügen orthosymmetrisch ist, und bei der daher die Φ_2 in Wegfall kommen. Hier die Tabelle der Gesammtzahlen:

	Zügezahl, diasymmetrisch				desgl. orthosymmetrisch	
$\lambda =$	0,	1,	2,	3	2,	4
$+\Phi_2$:	4	4	$4+4$	$4+3\cdot 4$	4	$4+6\cdot 4$
			8	16		28

Zeuthen hat l.c. diese Aufgaben durch Continuitätsbetrachtungen erwiesen, welche an die algebraische Gleichung der Curve anknüpfen; wir können ihm hierin nicht folgen, weil sich das einstweilen doch noch nicht auf die höheren p übertragen läſst.

Eine andere besonders einfache Beweismethode bietet hier der Uebergang zum hyperelliptischen Falle (vergl. Anm 11). Wir erhalten für die verschiedenen Arten der C_4 als hyperelliptischen Gränzfall einen doppeltzählenden Kegelschnitt bez. mit

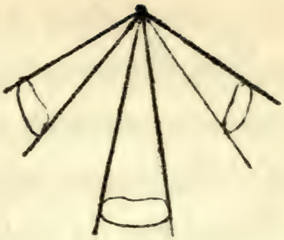
$\overline{8}$, $2+\overline{6}$, $4+\overline{4}$, $6+\overline{2}$, $\overline{8}$, 8,

Verzweigungspunkten (wo die überstrichenen Ziffern sich auf die imaginären, die anderen auf die reellen Verzweigungspunkte beziehen). Da geben nun je 2 conjugirt imaginäre Verzweigungspunkte, wie je 2 reelle miteinander geradlinig verbunden eine reelle Φ. Die Zahl der reellen Φ wird dementsprechend in den verschiedenen Fällen

4, $1+3$, $6+2$, $15+1$, 4, 28,

was richtig ist.

[Di. 5. I. 92] Wir versuchen andererseits die Doppelpunktsmethode. Bei jeder einzelnen reellen Curve 4. Ordnung können wir, wie aus der Theorie der symmetrischen Flächen hervorgeht, jedes einzelne Oval reell in einen isolirten Doppelpunkt zusammenziehen, so daſs eine Curve vom Geschlecht $p=2$ entsteht: ausgenommen ist dabei nur von vorne herein die nulltheilige Curve. Diejenigen Φ_2 nun, welche das ausgezeichnete Oval unpaarzahlig berührten, fallen dabei zu je 2 zusammen und liefern, an der Curve $p=2$ gedeutet, die zu dieser Curve gehörigen reellen Φ_1, wie



nebenstehende Figur erläutert. Man sieht, daſs an dem einzelnen Oval immer doppelt so viele Φ_2 der Curve $p=3$ betheiligt sind, als die resultirende Curve $p=2$ reelle Φ_1 besitzt. Auf diese Weise sind wir in der Lage, *allgemein die Zahl und Lage derjenigen Φ_2 zu bestimmen, an denen das einzelne Oval der Curve $p=3$ Theil hat* (vorausgesetzt immer, daſs wir die bei $p=2$ in jedem Falle auftretenden Φ_1 bereits bestimmt haben).

Dagegen fehlt uns jeder Aufschluſs über die bei der Curve $p=3$ etwa vorhandenen Φ_0. Zu einer vollen Ableitung unserer Angabe über Realität der Φ ist also die Doppelpunktsmethode hier (wie später in den höheren Fällen) nicht ausreichend. Wir werden später in der Art Ergänzung schaffen, daſs wir aus der Theorie der Abel'schen Functionen entweder (unter Heranziehung der ϑ Functionen) direct die Gesammtzahl der überhaupt vorhandenen reellen Φ bestimmen oder aber (unter alleiniger Heranziehung des Umkehrproblems) bei der C_4 mit Dp. die Gesammtzahl derjenigen reellen Φ festlegen, welche nicht durch den Doppelpunkt laufen.

3) Bei $p=4$ werden wir *dreifache Tangentenebenen* Φ_1 *und* Φ_3 *der räumlichen* C_6 *zu unterscheiden haben*,

(wobei wir späterhin die Φ_1 in Φ_1', Φ_1'' und Φ_1''' werden theilen können, jenachdem alle 3 Berührungspunkte der Φ_1 auf demselben Curvenzuge liegen, oder 2 derselben imaginär sind oder endlich auf ein zweites Oval hinübergerückt sind.) Unserem allgemeinen Theoreme nach sollen nun die Verhältniſse folgende sein:

α) Die niederste diasymmetrische Curve ($\lambda = 0$) wie die niedrigste orthosymmetrische Curve ($\lambda = 1$) besitzen keinerlei Φ_1 und damit überhaupt keine reellen Φ.

β) Die diasymmetrischen Curven $\lambda = 1, 2$ und die orthosymmetrische Curve $\lambda = 3$ besitzen für jedes ihrer Ovale 8 Φ_1, aber keine Φ_3.

γ) Die diasymmetrischen Curven $\lambda = 3, 4$ und die orthosymmetrische Curve $\lambda = 5$ besitzen ebenfalls für jedes ihrer Ovale 8 Φ_1, auſserdem aber für jedes Tripel von Ovalen 8 Φ_3.

Dies giebt denn die Gesammtzahlen der folgenden Tabelle:

	diasymmetrisch					orthosymmetrisch		
$\lambda =$	0,	1,	2,	3,	4	1,	3,	5
Zahl der $\Phi =$	0,	8,	$2 \cdot 8$,	$3 \cdot 8 + 8$,	$4 \cdot 8 + 4 \cdot 8$;	0,	$3 \cdot 8$,	$5 \cdot 8 + 10 \cdot 8$
			16	32	64		24	120.

Zum Beweise ziehen wir zunächst wieder die hyperelliptische Methode heran. Die kann natürlich nicht mehr leisten, als dass sie diejenigen Curvenarten erledigt, bei denen hyperelliptische Fälle überhaupt auftreten. Die orthosymmetrische Tripelcurve bleibt hier also von selbst bei Seite.

In den übrigen Fällen ergiebt sich ohne Weiteres die gewünschte Bestätigung. Wir haben, indem wir uns der Bezeichnung von p. 197 bedienen

	diasymmetrisch					orthosymmetrisch	
zweigungsp.	$\lambda = 0$	1	2	3	4	1	5
d. hyperell. Geb. –	$0+\overline{10}$	$2+\overline{8}$	$4+\overline{6}$	$6+\overline{4}$	$8+\overline{2}$	$0+\overline{10}$	$10+\overline{10}$

Nun wird eine reelle Φ entstehen, wenn wir entweder drei reelle Verzweigungspunkte durch eine Ebene verbinden oder einen reellen und zwei conjugirt imaginäre. Dies giebt also in den einzelnen Fällen:

reelle Φ :	0	2·4	4+4·3	20+6·2	56+8·1	0	120
d. h.	0	8	16	32	64	0	120

was mit den Behauptungen unseres Theorems übereinstimmt.

Wir wenden uns ferner zur Doppelpunktmethode. Da erledigen sich die diasymmetrischen Fälle $\lambda = 1, 2, 3, 4$ und die orthosymmetrischen $\lambda = 3, 5$ von selbst. Denn aus der Gestalt der zugehörigen symmetrischen Flächen ist ersichtlich, daſs man bei ihnen ein beliebiges der Ovale so in einen isolirten Doppelpunkt reell zusammenziehen kann, daſs die Curve in eine irreducibele Curve des Geschlechtes 3 übergeht. Indem wir sodann letztere Curve vom isolirten Doppelpunkte aus projiciren, entsteht eine reelle Curve 4ter Ordnung, deren reelle Doppeltangenten Φ_0 und Φ_2 je zwei reelle Φ_1 und Φ_3 vertreten, an denen das von uns ausgezeichnete Oval der ursprünglichen C_6 participirt. Das liefert dann aber für dieses Oval, und damit für jedes andere Oval der Curve, diejenige Angabe über die zugehörigen Φ_1 und Φ_3, die unserem allgemeinen Theoreme entsprechen. So liefert der Satz, daſs jede reelle ebene C_4 vier Doppeltangenten Φ_0 hat hier den Satz, daſs jedes unserer Ovale acht zu ihm gehörige Φ_1 besitzt. Wir brauchen das nicht weiter zu verfolgen. Auch werden wir kaum bedauern, daſs der Ansatz der Doppelpunktsmethode im Falle $\lambda = 0$ versagt; denn es ist a priori klar, daſs in dem Falle überhaupt keine reellen Φ vorhanden sein können.

Es ist hiernach nur der orthosymmetrische Fall $\lambda = 1$, der besondere Ueberlegung verlangt. Wir können auch bei der orthosymmetrischen Fläche $\lambda = 1$ die eine da überhaupt vorhandene Symmetrielinie zu einem Punkte zusammenziehen; nur verwandelt sich dann die Fläche nicht etwa in eine symmetrische Fläche $p=3$ sondern in *zwei zu einander symmetrische, von einander abgetrennte Flächen $p=2$*. Wir werden wissen wollen, was das für unsere C_6 bedeutet. Der besseren Uebersicht halber wollen wir die Frage so erweitern, dass wir auch die Fälle betrachten, wo eine orthosymmetrische Fläche mit 5, bez. 3 Symmetrielinien vorliegt, und man aus ihr zwei abgetrennte Bestandtheile macht, indem man die 5, bez. 3 Symmetrielinien *gleichzeitig* zu Punkten zusammenzieht. Diese Bestandtheile haben dann bez. $p=0$ und $p=1$. Nun wurde der Fall, dass beim Entstehenlassen von 5 Doppelpunkten unsere C_6 in zwei rationale C_3 zerfällt, schon eben nach seiner algebraischen Bedeutung erörtert: neu ist jetzt nur, dass die beiden Raumcurven dritter Ordnung, welche dabei entstehen, conjugirt imaginär sind und sich dabei in fünf reellen Punkten schneiden.

Analog müssen offenbar im Falle $\lambda=1$ zwei Curven 3ter Ordnung vom Geschlecht 2 entstehen, die dann 3, bez. 1 Punkt gemein haben sollen. Aber eine elliptische Curve dritter Ordnung ist nothwendig eben. Da tritt uns die Bedeutung des Falles $\lambda=3$ ohne Weiteres hervor. Es handelt sich offenbar darum, *dass die F_2*, welche mit einer

F_3 zusammen als Schnitt unsere C_6 erzeugt, in ein *Ebenenpaar* zerfällt und dann die F_3 in der That in zwei ebenen C_3 schneidet, die 3 Punkte mit einander gemein haben.

Analog muss sich der Fall $\lambda = 1$ erledigen.

Eine C_3 vom Geschlechte 2 ist nichts Anderes als eine dreifach überdeckte gerade Linie mit 8 Verzweigungspunkten. *Zwei solche Gerade, die sich in einem Punkte schneiden*, das ist die Ausartung der C_6, die im Falle $\lambda = 1$ eintritt. Dass wir aber bei einer solchen Ausartung unmöglich die ϕ ohne weiteres abzählen können, leuchtet ohne weiteres ein. Daher fällt also der orthosymmetrische Fall $\lambda = 1$ definitiv aus der Reihe derjenigen heraus, die man mit Hülfe der Doppelpunktmethode behandeln kann.

So ist denn für $p = 4$ weder die hyperelliptische Methode noch die Doppelpunktmethode ausreichend, um den vollen Beweis unseres Theorems zu geben; wohl aber liefern sie diesen Beweis, wenn man sie beide combiniert. Auch würde die Doppelpunktsmethode für sich genügen, wenn man der Theorie der Abel'schen Functionen vielleicht die *Gesammtzahl* der in jedem Falle vorhandenen reellen ϕ entnehmen wollte.

[Di. 5. 7. 92. II.] Die hiermit für $p = 3$ und $p = 4$ besprochenen Verhältnisse sind nun für die höheren p typisch (sobald man auch bei diesen die Doppelpunktsmethode anwenden und die Voraussetzung machen will, die Abzählung der reellen Φ sei für das Geschlecht $p=1$ bereits erledigt). Des Näheren stellt sich die Sache so:

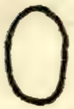
1) Ungerades p. Die Doppelpunktsmethode kann bei allen nicht nulltheiligen Curven angewandt werden und liefert Zahl und Vertheilungsweise derjenigen zugehörigen reellen Φ, welche wenigstens ein Oval ungeradzahlig berühren, d. h. der $\Phi_2, \Phi_4, \ldots\ldots$, immer in Uebereinstimmung mit unserem allgemeinen Theoreme. Dagegen bleibt die Zahl der Φ_0 (welche unserem Theoreme nach allemal 2^{p-1} betragen soll) unerledigt. In dieser Hinsicht wird uns die Theorie der Abel'schen Functionen später zweierlei ergänzende Ansätze an die Hand geben, indem wir von denselben aus entweder (mit Hülfe der Thetafunctionen) die Gesammtzahl der im einzelnen Falle reellen Φ, oder doch für die Curve mit Doppelpunkt (und dann mit blosser Hülfe des Umkehrtheorems) die Gesammtzahl der im einzelnen Falle reellen, nicht durch den Doppelpunkt gehenden Φ bestimmen können.

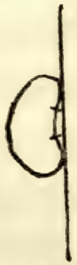
2) Gerades p. Hier giebt es $\Phi_1, \Phi_3, \Phi_5, \ldots\ldots\ldots$ Bei der nulltheiligen Curve sind daher alle Φ imaginär; es ist gar kein Problem bei ihnen zu erledigen. Alle anderen Fälle erledigen sich durch die Doppelpunktsmethode

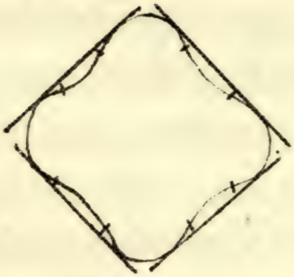
mit alleiniger Ausnahme des orthosymmetrischen Falles $\lambda = 1$. Bei letzterem sollen unserem allgemeinen Theoreme zufolge, 2^{p-1} ϕ, vorhanden sein. Ich bin nur so in der Lage dies zu beweisen, daſs ich vermöge der Theorie der Thetafunctionen allgemein die Gesammtzahl der in jedem Falle vorhandenen reellen ϕ bestimme.

So wenden wir uns denn jetzt zu dem neuen Kapitel: zur Anwendung der Abel'schen Functionen und dürfen vorweg bemerken, wenn wir da etwas weiter ausholen müſsen, daſs unsere bisherigen Fragestellungen da nicht nur zur Erledigung kommen werden, sondern auch eine auſserordentliche Verallgemeinerung erfahren sollen, vermöge deren sich alle unsere bisherigen Entwickelungen als Einzelheiten in ein groſses Ganzes einordnen.

Es ist nur anhangsweise, daſs wir versuchen, eine besondere Realitätsbetrachtung noch von den Curven 4ter Ordnung $p = 3$ auf die Curven 6ter Ordnung $p = 4$ zu übertragen. Wir trennen die ϕ_0 der Curve vierter Ordnung in ϕ_0' und ϕ_0'', jenachdem die beiden Berührungspunkte der ϕ_0 reell oder imaginär sind. Wir ziehen ferner die Wendetangenten w der Curve vierter Ordnung in Betracht und unterscheiden zwischen reellen Wendetangenten w' und imaginären w''. Dann hebt Zeuthen Annalen 7 (1874) hervor, daſs bei jedem einzelnen Oval der Curve vierter Ordnung die Zahl der w' doppelt so groſs ist, wie die Zahl der zu eben dem Ovale gehörigen Φ'_o : $w' - 2\Phi'_o = 0$, wie dies durch folgende Figuren etwa erläutert wird:

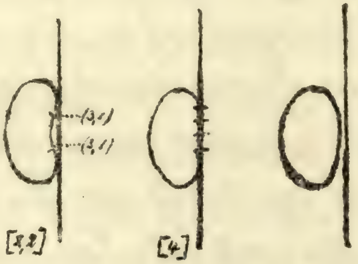






(Die Sache ist eben die, daſs eine jede Φ'_o des Ovals eine „Einbuchtung" deſselben abschlieſst) Da insgesammt bei unserer Curve $\Phi'_o + \Phi''_o = 4$ ist, so folgt aus diesem Ansatze, indem wir unter w' nunmehr die Gesammtzahl der reellen Wendetangenten der Curve verstehen, $w' + 2\Phi''_o = 8$. Diese Gleichung ist es, die ich seiner Zeit zu einer allgemeinen Realitätsrelation für ebene Curven mit nur einfachen Plücker'schen Singularitäten erweiterte, worüber auf pg. 251 ff. der Winterautographie das Nähere mitgetheilt ist. Ich erwähne das hier nur beiläufig, da mir daran liegt, zunächst einmal die für das einzelne Curvenoval geltende Formel $w' - 2\Phi'_o = 0$ als solche auf die Raumcurven 6ter Ordnung $p = 4$ zu übertragen.

Der erste Schritt zu der gewollten Uebertragung ist, daſs wir die Zeuthen'sche Regel in eine verallgemeinerungsfähige Form setzen. Ich will die Φ'_0 und w' des einzelnen Ovals zu dem Zwecke als „Gerade [2,2] und [3,1]" bezeichnen; daſs irgendwelche Gerade in eine dieser beiden Kategorieen gehört, wird sich durch zwei Bedingungen ausdrücken, und eben darum das Auftreten von Geraden [2,2], oder [3,1], noch keine Bedingung für die Curvencoëfficienten einführen. Anders ist es, wenn wir das Vorhandensein von Geraden [4] verlangen wollen, die werden nicht anders auftreten können, als wenn wir die Curvencoëfficienten einer bestimmten Bedingung unterwerfen. Der Beweis der Zeuthen'schen Regel ruht nun in der doppelten Bedeutung, welche wir einer Geraden [4] als Uebergangsfall beilegen können, vergl. die nebenstehende Figur. Die Gerade [4] erscheint dort einerseits als Uebergangsfall zwischen einer zum Oval gehörigen Φ'_0 und einer Φ''_0, andererseits als Uebergangsfall zwischen zwei reellen w' und zwei imaginären w''. Wir werden, ohne daſs wir die Figur betrachten, schlieſsen, daſs beim Passiren die



ses Uebergangsfalles $w' + 2\Phi_0'$ constant bleiben muſs; ein Blick auf die Figur genügt dann, um erkennen zu laſsen, daſs es sich um $w' - 2\Phi_0'$ handelt. Wir brauchen jetzt nur noch zu überlegen, daſs bei einem Oval ohne Doppelpunkt eine Aenderung in der Zahl der Φ_0', w' überhaupt nur durch das Vorkommniſs [4] herbeigeführt werden kann, um den Schluſs zu haben, daſs $w' - 2\Phi_0'$ für das einzelne Oval einer Curve vierter Ordnung, die sich innerhalb ihrer „Art" irgendwie ändern mag, überhaupt constant ist. Und nun werfen wir wieder den Blick auf irgendwelche gezeichnet vorliegende Curve vierter Ordnung, um zu erkennen, daſs $w' - 2\Phi_0'$ eben allemal $= 0$ ist.

Versuchen wir nun, für das einzelne Oval der Raumcurve sechster Ordnung $p = 4$ etwas Entsprechendes zu machen. Wir werden da zunächst die „singulären" Ebenen aufzählen, welche sich einstellen können, ohne daſs die Coëfficienten der Curve einer besonderen Bedingung unterworfen werden. Es handelt sich offenbar um die Vorkommniſse (2,2,2), (3,2,1), (4,1,1), also um die dreifachen Tangentenebenen, die zum Oval gehören, Φ_1, diejenigen Osculationsebenen deſselben, welche das Oval noch einmal berühren, OT, endlich seine Hyperosculationsebenen, H. Des genaueren wollen wir eine Φ_1, welche das Oval in 3 reellen Puncten berührt, mit Φ_1' bezeichnen, mit Φ_1'' aber eine Φ_1, welche das Oval nur in einem reellen Puncte berührt, während die beiden anderen Berührungspuncte entweder imaginär sind oder auf einem anderen Ovale der Curve liegen (was wir hier also nicht weiter unterscheiden). Ebenso theilen wir die H in H' und H''; die H' sind solche Hyperosculationsebenen, welche das Oval noch in zwei reellen einzelnen Puncten schneiden, die H'' solche, welche auſser im Hyperosculationspuncte überhaupt nicht treffen.

Fragen wir nun vorab, ob irgend zwei Φ_1, O.T., H, solange unsere Curve keinen Doppelpunct bekommt, zusammenrücken können. Bei den Φ_1, wie überhaupt den Φ, ist dies, wie wir schon früher bemerkten, ausgeschloſsen, weil beim Zusammenrücken zweier (2, 2, 2) eine Ebene mit mehr als 3 Berührungspuncten oder eine Ebene mit drei Berührungspuncten entstehen müſste, deren Gesammtmultiplicität höher ist, als bei einer Curve sechster Ordnung möglich ist.

Dagegen können zwei O.T. in [4, 2] oder in [3, 3], zwei H in [5, 1] zusammenrücken. Wir schlieſsen, daſs, bei unseren Ovale, *die Gesammtzahl der zugehörigen Φ_1 constant sein wird, während für die Gesammtzahl* der zugehörigen O T oder H eine solche Nothwendigkeit nicht besteht. Erstens stimmt ja auch mit dem, was wir über die Realität der Φ, von früher wissen ($\Phi_1 = 0$ bei dem Curvenzuge der orthosymmetrischen Curve $\lambda = 1$, $\Phi_1 = 8$ für jeden einzelnen Curvenzug aller anderen Curven sechster Ordnung).

Wir zählen nunmehr diejenigen singulären Ebenen auf, welche vorhanden sein können, sobald man die Constanten der Curve einfach particularisirt. Es sind dies [3,3], [4,2], [5,1]. Die Frage muss sein, zwischen welchen allgemeinen Vorkommnissen diese hier den Uebergang bilden mögen. Da ist zunächst [3,3] der Uebergang zwischen zwei reellen und zwei imaginären [3,2,1], d.h. O T. Dann aber [4,2] ein Uebergang im dreifachen Sinne:

a) der Uebergang zwischen einer Φ' und einer Φ'', {zwischen (2,2,2) und $(\overline{2,2,2})$, um es noch deutlicher zu bezeichnen},

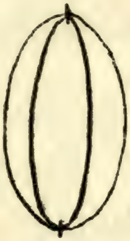
b) der Uebergang zwischen zwei reellen und zwei imaginären O T,

c) der Uebergang zwischen einer H' und einer H'' {nämlich zwischen (4,1,1) und $(4, \overline{1,1})$}.

Endlich ist (5,1) der Uebergang zwischen zwei reellen und zwei imaginären H; die reellen H sind dabei aber nothwendig H', da doch bei (5,1) der einzeln liegende Schnitt, pund nothwendig reell ist.

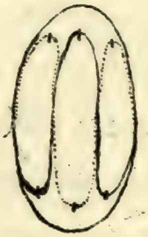
Indem wir diese Angaben überblicken, fragen wir, ob irgendwelche Combination unserer Anzahlen bei allen diesen Uebergängen constant bleiben mag. Wir bemerken, dass dies einmal (wie wir bereits wissen) für die Summe $\Phi_1' + \Phi_1''$ der Fall sein muss. Dann aber, dass das gleiche für die Combination $\Phi_1' \pm H''$ eintritt (wo über das Vorzeichen noch durch Betrachtung der Figuren zu entscheiden sein wird). In der That participirt ja nur H', nicht H'' an dem Vorkommnisse (5,1). Wir gewinnen also in der That eine neue Relation, die wir vorläufig in der unbestimmten Form aussprechen:

Für jeden einzelnen Zug der Curve sechster Ordnung ist $\Phi_1'' \pm H''$ constant. Wir müssen jetzt noch über das Vorzeichen des Ausdruckes und über den Zahlenwerth der Constante enscheiden. Hierbei werden wir die orthosymmetrische Curve $\lambda = 1$ wieder von allen anderen Fällen abgetrennt halten müssen. Bei ihr ist Φ_1 und also auch Φ_1' überhaupt $= 0$. Irre ich nicht, so ist bei ihr auch $H'' = 0$, sofern man einen solchen Fall betrachtet, der in der Nähe einer doppeltzählenden Raumcurve dritter Ordnung liegt. Unsere Ueberlegung würde dann ergeben, *dass bei der orthosymmetrischen Curve mit $\lambda = 1$ überhaupt $H'' = 0$ ist.* Um die Ovale der anderen Curvenarten zu untersuchen, denke ich mir zunächst etwa ein Rotationsellipsoid mit 3 unter 60° gegen einander geneigten Ebenen geschnitten, die durch seine Axe gehen:



(Vorderseite des Ellipsoids).

und setze dann an Stelle der Gleichung der 3 Ebenen: $pqr = 0$ die andere $pqr = \varepsilon$, unter ε eine kleine Grösse verstanden. So entsteht ein Curvenoval, wie es in folgender Figur gezeichnet ist

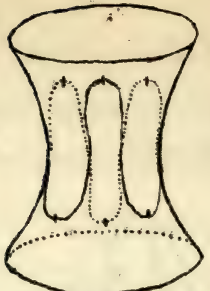


(Vorder- und Rück-Seite des Ellipsoids; die Curve auf der Rückseite ist punctirt).

Man erkennt das Vorhandensein zweier (horizontaler) Φ_1', sowie von sechs H'' (die betr. Hyperosculationspuncte liegen in den sechs „Scheiteln" der Curve,*) aus Symmetriegründen) Ich zeichne ferner ein analog gestaltetes Oval auf einem Rotationshyperboloid:

---

*) die ich durch Striche markirte.



Der Unterschied ist, daſs jetzt die 6 Scheitel des Ovals nach auſsen gebogen sind. Infolge deſsen sind jetzt noch 6 weitere Ebenen Φ'_1 vorhanden, deren einzelne in drei auf der Curve aufeinanderfolgenden Scheiteln berührt (z.B. in den drei Scheiteln der Vorderseite unserer Zeichnung).

Andererseits haben sich die sechs H'', die vorhin vorhanden waren, jetzt in Ebenen H' verwandelt. Wir erkennen, *daſs in beiden Fällen die Summe $\Phi'_1 + H''$ den gleichen Betrag 8 hat* und schlieſsen, *daſs dieselbe überhaupt acht bei jedem Ovale betragen muſs, welches sich aus den hier betrachteten durch Continuität ableitet*. Das muſs also, nach unserer Kenntniſs der Curven sechster Ordnung, zunächst von allen Ovalen derjenigen eintheiligen Art gelten, der die gezeichneten Beispiele angehören, d.h. von den Ovalen der eintheiligen diasymmetrischen Curve. Von da aus wird man's auf die Ovale aller anderen Curvenarten übertragen, die eintheilige orthosymmetrische Curve ausgenommen. Doch verfolgen wir das hier nicht weiter, und verweisen zum Schluſs nur noch auf die Arbeit von *Franz Meyer*, von der auf pag. 87, 94 der gegenwärtigen Ausarbeitung die Rede war. Das von Franz Meyer abgeleitete Resultat ist jedenfalls mit dem hier gewonnenen nicht in Widerspruch.

[Do. 7. 7. 92.]

II Heranziehen der Abel'schen Funktionen.

Ich werde hier die Grundlegung der Theorie nur ganz kurz berühren können; Genaueres findet man in meinen Vorlesungen über Abel'sche Functionen (1888-89), in meinem Aufsatze in Ann. 36 (1889), endlich in dem demnächst erscheinenden zweiten Bande der elliptischen Modulfunctionen; ich nenne hier nur diese meine eigenen Darstellungen, weil ich anderenfalls die ganze weitschichtige Literatur des Gegenstandes würde aufzählen müſsen, was viel zu weit führen würde.

A. Allgemeines, bis zum Umkehrtheorem inclusive.

1. Vorerinnerungen. Die wesentlichen Grundlagen der hier anzustellenden Entwickelungen sind bereits im Wintersemester gegeben worden. Es handelt sich zunächst darum, auf der Riemann'schen Fläche ein System *kanonischer Querschnitte*

$A_1, B_1; A_2, B_2; \dots\dots A_p, B_p$ festzulegen (Winterautographie p 42 ff.). Wir haben dann ferner, die zugehörigen *Normalintegrale erster Gattung* $j_1, j_2, \dots\dots j_p$ mit den Perioden $\tau_{\alpha\beta}$ (W.A. p. 60 ff.), endlich die *Normalintegrale dritter Gattung* $\Pi_{\xi\eta}^{xy}$ (W.A. p 65 ff.). Betrachtet man letztere als Functionen von x, so zeigen sie an den Querschnitten

$$A_1, \dots\dots\dots A_p, \quad B_1, \dots\dots\dots B_p$$

die Perioden

$$0, \dots\dots\dots 0, \quad 2i\pi j_1^{\xi\eta}, \dots\dots\dots 2i\pi j_p^{\xi\eta}$$

Uebrigens gilt für sie Vertauschung von Parameter und Argument:

$$\Pi_{\xi\eta}^{xy} = \Pi_{xy}^{\xi\eta}.$$

2. *Vom Abel'schen Theoreme.* Das sogenannte Abel'sche Theorem bezieht sich auf diejenigen Werthe, welche irgend welches vorgelegte Integral, J, annimmt, wenn es zwischen den Punkten $x_1, x_2 \dots\dots x_m$ einer ersten Punktgruppe und den Punkten $x_1', x_2' \dots\dots x_m$ einer zweiten *aequivalenten* Punktgruppe hinerstreckt wird. Oder, um es genauer zu bezeichnen: sei R eine algebraische Function der Riemann'schen Fläche, welche in den Punkten $x_1, \dots\dots x_m$ (und nur in diesen) den Werth C, in den Punkten $x_1', \dots\dots x_m'$ (und abermals nur in diesen) den Werth C' annimmt; dass es eine solche Function giebt, ist ja gerade die Definition der Aequivalenz. Wir breiten jetzt unsere Fläche m-blätt-

nigüber der z Ebene aus, worauf die m Punkte x bei $z = C$ vertical über einander liegen werden; die m Punkte x' bei $z = C'$. Wir ziehen ferner in der z Ebene zwischen $z = C$ und $z = C'$ irgend welche Curve, welche auf die darüber liegende Fläche übertragen durch keinen Verzweigungspunkt derselben hindurchführt. Vermöge derselben erscheinen dann die m Punkte x und die m Punkte x' in bestimmter Weise zusammengeordnet, und ich will annehmen, dass die Bezeichnung von vornherein gerade so gewählt sei, dass dem x_1 das x'_1, ... dem x_m das x'_m zugewiesen wird. Nun handelt es sich im Abel'schen Theorem um die folgende Integralsumme:

$$J^{x_1 x'_1} + J^{x_2 x'_2} + \dots\dots\dots J^{x_m x'_m},$$

jedes einzelne J hinerstreckt längs desjenigen Integrationsweges auf der Riemann'schen Fläche, der zwischen den beiden Gränzpunkten oberhalb der in der z Ebene vorgezeichneten Curve verläuft. Da können wir denn für die Summe sofort schreiben

$$\int_C^{C'} \left(\left(\frac{dJ}{dz}\right)_1 + \left(\frac{dJ}{dz}\right)_2 + \dots\dots\dots \left(\frac{dJ}{dz}\right)_m \right) dz,$$

das Integral hinerstreckt längs der in der z. Ebene gezeichneten Curve. Und hier ist nun der mit dz multiplicirte Factor eine symmetrische Function der Werthe, welche $\frac{dJ}{dz}$ in den verschiedenen Blättern der Riemann' 'schen Fläche annimmt, d.h. eine rationale Function von x. Unsere Summe nimmt daher den folgenden Werth an.

$$\int_{c'}^{c} r(z) \cdot dz.$$

wo es sich nur noch darum handeln wird, die rationale Function $r(z)$ je nach der Eigenart des gerade betrachteten Integrals Y (nach der Zahl und Lage seiner Unendlichkeitspunkte u.s.w) festzulegen.

Wir specificiren diesen Ansatz hier, ohne die Einzelheiten auszuführen, für die j und die Π. Wir finden zunächst, als Abel'sches Theorem für die Integrale erster Gattung:

$$j_\alpha^{x_1 x_1'} + j_\alpha^{x_2 x_2'} + \dots\dots j_\alpha^{x_m x_m'} = 0 \quad (\text{für } \alpha\ 1, 2, \dots p),$$

ferner aber als Abel'sches Theorem für die Integrale dritter Gattung:

$$\Pi_{\xi\eta}^{x_1 x_1'} + \Pi_{\xi\eta}^{x_2 x_2'} + \dots\dots \Pi_{\xi\eta}^{x_m x_m'} = \log\frac{(\xi - \mathcal{C}) \cdot (\eta - \mathcal{C}')}{(\xi - \mathcal{C}')(\eta - \mathcal{C})}$$

(wo rechter Hand unter ξ, η nicht die „Flächenpunkte" ξ, η sondern die „Werthe" verstanden sind, welche z in diesen Flächenpunkten annimmt). Uebrigens controliren wir letztere Formel, indem wir (vermöge des Vertauschungssatzes und der früheren Angabe über die Periodicität Π) die Perioden berechnen, welche die Summe der Π als Function von ξ, oder η, an den Querschnitten A, B, bez. bei Umlaufung der Punkte x, x' besitzt.

3) *Von der Umkehr der Abel'schen Theoreme.* [Fr. 8. 7. 92.]

Es handelt sich nunmehr darum, daſs man rückwärts aus den p Gleichungen:

$${}_e\Pi^{x_1 x'_1}_{\xi\,\eta} + \Pi^{x_2\ x'_2} + \ldots\ldots\ldots \Pi^{x_m\ x'_m}_{\xi\ \eta}$$

aufzubauen und sich zu überzeugen sucht (indem man die eben angedeuteten Ueberlegungen über die Periodicität der einzelnen Π rückwärts durchläuft), daſs hier eine algebraische Function von ξ vorliegt, welche gerade in den $x_1 \ldots x_m$ verschwindet, in den $x'_1, \ldots\ldots x'_m$ unendlich wird, was doch die Definition der Aequivalenz ist.

4. *Vom Umkehrproblem und den allgemeinen Eigenschaften seiner Lösung.*

Man denke sich m Puncte $y; y_1, y_2, \ldots\ldots y_m$, ferner p Gröſsen k_α irgendwie gegeben. Das Umkehrproblem in seiner allgemeinsten Fassung verlangt dann, *die p Gleichungen.*

$$j_\alpha^{x_1 y_1} + \ldots\ldots j_\alpha^{x_m\, y_m}\ k_\alpha \quad (\alpha = 1, 2, \ldots\ldots p)$$

nach den x aufzulösen.

Da ist zuvörderst ersichtlich, daſs mit jeder Punctgruppe $x'_1 \ldots\ldots x'_m$ auch jede mit ihr aequivalente Punctgruppe $x'_1, \ldots\ldots x_m$ eine Lösung sein wird, so wie umgekehrt, daſs zwei verschiedene Lösungen $x_1, \ldots\ldots x_m$, $x'_1, \ldots\ldots x'_m$ (falls solche existiren sollten) einander aequivalente Punctgruppen vorstellen. Es ist also nicht sowohl eine einzelne

Punktgruppe G_m, welche hier gesucht wird, als eine *Vollschaar aequivalenter Punktgruppen*. Bezeichnen wir dieselbe mit G^q_m, so wird q in bekannter Weise den Werth $(m-p+\sigma)$ haben, unter σ das Ergänzungsglied des Riemann-Roch'schen Satzes verstanden, auf deſsen Definition wir hier nicht noch einmal zurückkommen.

Uebrigens wird diese Vollschaar von Punkten x ungeändert bleiben, wenn man die k_α irgendwie um simultane Perioden der Integrale j_α vermehrt. Eine solche Vermehrung kann dadurch entstehen, daſs man bei gegebenen x, y den einzelnen Integrationsweg $x_i\, y_i$ um einen Periodenweg abändert oder auch so, daſs man zwei der x irgend mit einander vertauscht. Man sollte also die Gleichungen des Umkehrproblems lieber so schreiben:

$$j_\alpha^{x_1 y_1} + j_\alpha^{x_2 y_2} + \dots\dots j_\alpha^{x_m y_m} \equiv k_\alpha \;(\text{mod. Perioden}).$$

und wird sich das Sachverhältniſs in der Weise einprägen können, daſs man sagt: *die G^q_m, welche die Lösung des Umkehrproblems ausmacht, hänge von den k_α eindeutig und 2p-fach periodisch ab.*

5. Vom Umkehrtheorem. Ich verstehe unter Umkehrtheorem den Satz, der darüber Aufschluſs gibt, wann überhaupt das Umkehrproblem eine Lösung hat. Die Existenz der Lösung wurde ja soeben ohne weitere Begründung supponirt, es ist da also noch eine Ergänzung nöthig. In dieser Hinsicht wird man von vornherein erkennen, daſs für $m < p$ nur in Ausnahmefällen Lösungen vorhanden sein können, indem für die Werthsysteme der $y_1 \dots y_m, k_\alpha$, welche da eine Lösung zulaſsen, jedenfalls $(p-m)$ Bedingungen erfüllt sein müſsen. Die nähere Formulirung dieser $(p-m)$ Bedingungen würde uns hier allerdings zu weit führen. Wir beschränken uns also auf die Fälle $m \geqq p$ und sprechen da auch nur ohne Beweis den fundamentalen Satz aus, *daſs das Umkehrproblem bei $\geqq p$ in der That immer Lösungen hat, daſs also bei $m \geqq p$ nicht nur alle besonderen Gleichungen für die $y_1 \dots y_m, k_\alpha$ wegfallen (wie nach der Zahl der Variabelen selbstverständlich), sondern auch alle Ungleichungen (an die man doch hier, wo wir mit transcendenten Functionen zu thun haben, denken könnte).*

Mit den so aufgezählten fünf Punkten haben [Mo. 11. f. 92] wir bereits die Grundlage für einen groſsen Theil der für uns in Betracht kommenden *Anwendungen der Abelschen Functionen auf Geometrie*.

Ich werde diese ganze Erläuterung der gröſseren Bestimmtheit halber zunächst an die Curve C_{2p-2} der φ anknüpfen, was anderweitige Curven angeht, so wird bezüglich ihrer weiter unten eine bez. Bemerkung gemacht werden.

Wir knüpfen an den Umstand an, der vor Pfingsten zum Nachweis gebracht wurde (pag. 98 ff. der vorliegenden Autographie), dass die Curve der φ eine „Elementarcurve" ist, d.h. dass die Flächen 1ten, 2ten, 3ten etc. Grades des sie enthaltenen Raumes aus ihr allemal Vollschaaren aequivalenter Punkte ausscheiden, nämlich die

Ebenen f_1 .... eine G_{2p-2}^{p-1}
die f_2 .... eine G_{4p-4}^{3p-4}
die f_3 .... eine G_{6p-6}^{6p-5} etc.

(von denen nur die erste eine Specialschaar ist und zwar die einzige Specialschaar G_{2p-2}^{q}, welche es giebt).

Seien nun

$$y_1, y_2, \dots\dots y_{2p-2}$$

irgend $2p-2$ Punkte unserer Curve, die in einer Ebene gelegen sind. So werden andere $2p-2$ Punkte

$$x_1, x_2, \dots\dots x_{2p-2}$$

der Curve gleichfalls in einer Ebene liegen, sobald wir dafür sorgen, dass sie zu den y „aequivalent" sind. Es werden ferner $4p-4$ Punkte der Curve:

$$x_1, x_2, \dots\dots x_{4p-4}$$

auf einer f_2 liegen, sobald wir dafür sorgen, dass sie mit den zweimal gezählten Punkten y „aequivalent" sind, etc. Aber dieses „Aequivalentsein" drückt sich durch das Abel' sche Theorem in den Gleichungen aus:

$$\left.\begin{array}{l} \int_\alpha^{x_1,y_1} + \dots\dots\dots \int_\alpha^{x_{2p-2},y_{2p-2}} \equiv 0 \,(\text{mod. } P) \\ \text{bez: } \int_\alpha^{x_1,y_1} + \int_\alpha^{x_2,y_2} + \dots\dots\dots \int_\alpha^{x_{4p-4},y_{2p-2}} \equiv 0 \,(\text{mod. } P) \end{array}\right\} \alpha = 1, 2, \dots p$$

(wo in der letzten Gleichung jeder der $2p-2$ Punkte y zweimal als Integralgränze benutzt sein wird). Umgekehrt werden wir sagen, *daſs diese Gleichungen des Abel'schen Theorems jetzt durch die Angabe über die Lage der $2p-2$, bez. $4p-4$ Punkte x ihre geometrische Interpretation finden.* Uebrigens ist für die späteren Formeln bequemer, sämmtliche unteren Integralgränzen in einen einzelnen beliebig gewählten Punkt z der Curve zu verlegen.

Sei $\int_\alpha^{y_1,z} + \int_\alpha^{y_2,z} + \dots\dots\dots \int_\alpha^{y_{2p-2},z} \equiv k_\alpha \,(\text{mod. } P)$.

So werden wir die vorstehenden Gleichungen folgendermaſsen schreiben können:

$$\left.\begin{array}{l} \int_\alpha^{x_1,z} + \int_\alpha^{x_2,z} + \dots\dots\dots \int_\alpha^{x_{2p-2},z} \equiv k_\alpha \,(\text{mod. } P), \\ \text{bez. } \int_\alpha^{x_1,z} + \int_\alpha^{x_2,z} + \dots\dots\dots \int_\alpha^{x_{4p-4},z} \equiv k_\alpha \,(\text{mod. } P) \end{array}\right\} \alpha = 1, 2 \dots p$$

und dies sind die Formeln, von denen wir jetzt immer zu Gebrauch machen wollen, indem wir uns zu unserem eigentlichen Gegenstande, *der allgemeinen Theorie der Berührungsflächen* wenden.

Unter einer Berührungsfläche μ^{ter} Ordnung versteken wir eine solche f_μ, welche unsere C_{2p-2} überall, wo sie dieselbe trifft, berührt, im Ganzen also in $\mu(p-1)$ Punkten berührt. Wir bezeichnen dieselbe allgemein mit F_μ (so, wie wir insbesondere überall berührende Ebene mit Φ bezeichnet hatten). In die Existenz und die Gruppirung dieser F_μ wird uns die Theorie der Abel'schen Functionen einen eigenartigen Einblick gewähren. Und zwar wird sich dieselbe, was $\mu > 1$ angeht, vollständig mit den wenigen Sätzen ermöglichen, die wir aus der Theorie der Abel'schen Functionen entwickelt haben; nur wenn wir $\mu = 1$ discutiren wollen, müſsen wir daneben noch das Hülfsmittel der ϑ heranziehen. Wir bemerken auch gleich, daſs wir da leicht noch eine Verallgemeinerung eintreten laſsen können, indem wir statt der Berührungsflächen Osculationsflächen, Hyperosculationsflächen etc. setzen. Wir werden weiter unten auch hierauf genauer eingehen.

Der ganze Ansatz ist einfach dieser. Sollen $x_1, x_2, \ldots\ldots x_{\mu(p-1)}$ die Punkte sein, in denen eine F_μ berührt, so werden die Gleichungen bestehen müſsen

$$2\left(j_\alpha^{x_1,k} + j_\alpha^{x_2,k} + \ldots\ldots\ldots j^{x_{\mu(p-1)},k}\right) \equiv \mu\, k_\alpha \,(\text{mod. } \mathfrak{P})$$
$$(\alpha = 1, 2, \ldots\ldots p).$$

Wir dividiren diese Congruenzen durch 2. Dann entsteht, wenn wir unter ρ_β, ρ'_β ganze Zahlen verstehen wollen, die nach Belieben gleich Null oder Eins genommen werden können:

$$j_\alpha^{x_1, z} + j_\alpha^{x_2, z} + \dots + j_\alpha^{x_{\mu(p-1)}, z} \equiv \frac{\mu k_\alpha}{2} + \sum_1^p \varrho_\sigma \frac{P_{\alpha\sigma}}{2} + \sum_1^p \varrho'_\sigma \frac{P'_{\alpha\sigma}}{2},$$

unter den $P_{\alpha\sigma}$, $P'_{\alpha\sigma}$ die Perioden erster und zweiter Art des Integrals j_α verstanden. Dies sind, bei der Beliebigkeit der ϱ, ϱ', im Ganzen 2^{2p} Gleichungssysteme, welche ebensoviele Umkehrprobleme vorstellen. Die Theorie dieser Umkehrprobleme ist ohne Weiteres, in geometrische Sprache übersetzt, die Theorie der Berührungsflächen F_μ.

Da liegt nun in der That, sofern wir $\mu = 1$ nehmen, eine Schwierigkeit vor, die für $\mu > 1$ nicht mehr besteht. Bei $\mu = 1$ haben wir Umkehrprobleme mit $p-1$, d. h., mit weniger als p unbekannten Puncten. Ein solches Umkehrproblem kann nach dem früheren nur lösbar sein, wenn die rechter Hand stehenden Grössen eine bestimmte Bedingung erfüllen. Aber wir kennen diese Bedingung einstweilen nicht und können ausserdem nicht beurtheilen, wie es mit dem Befriedigtsein dieser Bedingung durch die bei unseren Gleichungen auf der rechten Seite stehenden Grössen steht. Es bleibt da zunächst nichts Anderes übrig, als dass wir den Gedankengang umkehren und sagen: Wir wissen anderweitig, dass es bei unserer C_{2p-2} $2^{p-1}(2^p-1)$ überall berührenden Φ gibt, im speciellen Falle kann es auch unendlich viele Φ geben. Daher schliessen wir, dass von den hier zur Discussion stehenden 2^{2p} speciellen Umkehrproblemen im Allgemeinen gerade $2^{p-1}(2^p-1)$ eine Lösung und zwar eine völlig bestimmte Lösung gestatten, während es in den speciellen Fällen so sein kann, dass eine dieser Lösungen unbestimmt wird oder auch dass eines der $2^{p-1}(2^p+1)$ im Allgemeinen auszuschliessenden Umkehrprobleme Lösungen gewinnt. Genaueres hierüber wird aber, wie schon angedeutet, nur erst die Theorie der Thetafunctionen geben können.

Man wird vielleicht fragen, welches die "Charakteristiken" $\rho_\alpha, \rho'_\alpha$ sein mögen, welche zu den $2^{p-1}(2^p-1)$ "lösbaren" Umkehrproblemen gehören? Hierauf ist zu antworten, dass dies überhaupt keine bestimmten Grössen sind. In der That die k_α, welche in unseren Gleichungen figuriren, sind nur bis auf Multipla der Perioden P, P' bestimmt, die $k_\alpha/2$ also nur bis auf Multipla der Periodenhälften; ich kann also die Definition der $k_\alpha/2$ so wählen, dass zu irgend welcher Φ, die ich herausgreife, ein ganz beliebiges System von $\rho_\alpha, \rho'_\alpha$ gehört. Was bestimmt ist, sind einzig die Differenzen der ρ_s, ρ_s' und $\bar{\rho}_s$, $\bar{\rho}_s'$, die zu irgend zwei herausgegriffenen Φ, $\bar{\Phi}$ gehören. In der That wird man ja für die bez. Berührungspuncte die Gleichungen bilden:

$$j_\alpha^{x_1,\bar{x}_1} + j_\alpha^{x_2\bar{x}_2} + \cdots\cdots j_\alpha^{x_{p-1},\bar{x}_{p-1}} \equiv \Sigma(\rho_s-\bar{\rho}_s)\frac{P_{\alpha s}}{2}+\Sigma(\rho_s'-\bar{\rho}_s')\frac{P'_{\alpha s}}{2},$$

aus denen die k_α ganz herausgefallen sind. Wir werden das so aussprechen: Vermöge unseres bisherigen Ansatzes erhalten die Φ keine absoluten, sondern nur relative Charakteristiken. Es soll damit zugleich offen gelassen sein, dass wir später vermöge eines weitergehenden Ansatzes, nämlich vermöge der Theorie der Thetafunctionen, den Φ in der That absolute Charakteristiken beilegen werden.

Wir wenden uns jetzt zu den F_μ mit $\mu \geqq 2$. Da wird die ganze Sache darum zunächst viel einfacher, weil die sämmtlichen 2^{2p} Umkehrprobleme:

$$j_\alpha^{x_1,z} + \cdots + j_\alpha^{x_{\mu(p-1)},z} = \frac{\mu k_\alpha}{2} + \Sigma \rho_s \frac{P_{\alpha s}}{2} + \Sigma \rho_s' \frac{P'_{\alpha s}}{2}$$

hier zweifellos Lösungen haben. Es gibt 2^{2p} unterschiedene Systeme von Berührungsflächen F_μ. Zugleich können wir sagen, wie viel mal unendlich diese Flächensysteme sind. Ist $\mu > 2$, so ist die Zahl der gesuchten Berührungspunkte x grösser als $2p-2$ und demnach das Zusatzglied σ des Riemann-Roch'schen Satzes gewiss Null. Ist $\mu = 2$, so ist die Zahl der Puncte $2p-2$. Aber es gibt nur eine einzige Schaar von Specialgruppen zu $2p-2$ Punkten, das ist diejenige, die von den Ebenen des R_{p-1} ausgeschnitten wird. Bei ihr sind unsere Integralsummen $= \kappa_\alpha$, das Ergänzungsglied des Riemann-Roch'schen Satzes gleich 1. Fassen wir zusammen, so kommt: Unsere Systeme von Berührungsflächen F_μ sind alle $[\mu(p-1)-p]$ fach unendlich, nur das eine bei $\mu=2$ auftretende System, welches den Werthen $\varrho_\alpha=0$, $\varrho'_\alpha=0$ entspricht, ist nicht $(p-2)$ fach sondern $(p-1)$ fach unendlich.

In dem so formulirten Satze liegt bereits drin, dass bei geradem μ die "Charakteristiken" ϱ_α, ϱ'_α absolute Bedeutung haben. In der That werden ja bei geradem μ die Grössen $\mu\kappa_\alpha/2$ bis auf Multipla *ganzer* Perioden definirt sein. Die F_μ haben da also absolute Charakteristiken (die wir Elementarcharakteristiken nennen, im Gegensatze zu den absoluten Charakteristiken bei ungeradem μ, die wir erst später einführen). Bei ungeradem μ ist die Sache natürlich so, wie bei dem besonderem Falle $\mu=1$; wir werden zunächst nur von relativen Charakteristiken der bez. F_μ sprechen dürfen.

Bei geradem μ wird allgemein dasjenige F_μ unsere besondere Aufmerksamkeit auf sich lenken, dessen sämmtliche ϱ_α, ϱ'_α verschwinden (dessen Elementarcharakteristik also, um einmal die sonst übliche Schreibweise anzuwenden $= \begin{pmatrix} 0 \cdots 0 \\ 0 \cdots 0 \end{pmatrix}$ ist). Wir haben da die Gleichungen:

$$j_\alpha^{x_1,z} + \cdots + j_\alpha^{x_{\mu(p-1)},z} \equiv \mu\cdot\kappa_{\frac{\alpha}{2}},$$

die wir natürlich auch so schreiben können:

$$j_\alpha^{x_1,z} + \cdots + j_\alpha^{x_{\frac{\mu}{2}(2p-2)},z} \equiv \frac{\mu}{2}\kappa_\alpha.$$

Es sind das aber genau dieselben Gleichungen, welche besagen, daſs die $\frac{\mu}{2}(2p-2)$ Punkte x das volle Schnittpunktsystem unserer Curve mit einer $f_{\frac{\mu}{2}}$ bilden. Daher: Die F_μ des in Rede stehenden ausgezeichneten Systems werden von dem doppeltzählenden $f_{\mu/2}$ gebildet.

Einen Satz, der für alle Berührungssysteme gleichförmig gilt, erhält man, wenn man die Gleichungen, die zu zwei Flächen F_μ, F'_μ deſselben Systems gehören, zusammenaddirt. Es kommt dann:

$$\int_\alpha^{x_1,h} + \cdots\cdots\cdots \int_\alpha^{x_{\mu(p-1)},h} + \int_\alpha^{x'_1,h} + \cdots\cdots \int_\alpha^{x'_{\mu(p-1)},h} \equiv \mu K_\alpha .$$

Das heiſst: Die Berührungspunkte irgend zweier F_μ deſselben Systems bilden den vollen Schnitt unserer Curve mit einer f_μ. Umgekehrt werden wir auch gleich sagen können: Legen wir durch die Berührungspunkte x einer F_μ irgend eine f_μ, so schneidet dieselbe in weiteren $\mu(p-1)$ Punkten x', welche ihrerseits die Berührungspunkte einer F'_μ deſselben Systems sind.

Allgemeiner werden wir solche Berührungsflächen combiniren, deren Grad sich um eine gerade Zahl unterscheidet, also bez. μ und $(\mu + 2\nu)$ ist. Wir werden solche Systeme von F_μ und $F_{\mu+2\nu}$ correspondirende nennen, welche dieselben ϱ_s, ϱ'_s besitzen. Nun addiren wir die Gleichungen, welche sich auf irgend zwei F_μ und $F_{\mu+2\nu}$

aus correspondirenden Systemen beziehen, zusammen und schlieſsen daraus, daſs die $(\mu+\nu)(2p-2)$ Berührungspunkte, welche die beiden Flächen zusammengenommen aufweisen, den vollen Schnitt unserer Curve mit einer $f_{\mu+\nu}$ ausmachen, etc. etc.

Ein besonders wichtiger Fall der hiermit angedeuteten Entwickelung entsteht, wenn wir $\mu=1$ nehmen, wo dann nur für $2^{2p-1}(2^p-1)$ der Umkehrprobleme zugehörige F_1, d.h. Φ existiren. Wir werden schlieſsen, daſs die 2^{2p} Systeme von F_μ, die es giebt, bei ungeradem μ in zwei Claſsen zerfallen: in $2^{p-1}(2^p-1)$ Systeme, welche einzeln den Φ „correspondiren", und in $2^{p-1}(2^p+1)$, welche für sich stehen. Wir brauchen durch die Berührungspunkte einer Φ nur irgend welche $f_{1+\nu}$ zu legen, um in deren weiteren Schnittpunkten mit der Curve solche Punkte zu haben (und zwar die allgemeinsten solchen Punkte), in denen eine $F_{1+2\nu}$ des correspondirenden Systems berührt, etc. etc.*)

Man sieht, mit welcher Leichtigkeit hier eine volle Theorie der F_u und der Gruppirungen, welche dieselben unter sich zeigen, entwickelt werden kann. Es ist nützlich, alle hierentstehenden Sätze einmal für $p=3,4$ zu specificiren, um zu sehen, wie außerordentlich viel damit in geometrischer Hinsicht gewonnen ist. Und das dies Alles mit einem Schlag in voller Allgemeinheit gewonnen ist, das eben ist die große Leistung, welche uns hier die Abel'schen Functionen an die Hand geben. Dabei liegen weitere Verallgemeinerungen nahe. Ich will nur zweierlei bez. Ansätze angeben:

---

*) Uebrigens wird für die F_μ ungerader Ordnung daſselbe gelten, was wir soeben im besondere für Φ entwickelten: daſs wir einstweilen noch nicht in der Lage sind, absolute Charakteristiken derselben festzulegen, sondern nur erst relative Charakteristiken. Denn die Gröſsen $\mu\cdot\frac{k_\alpha}{2}$ sind bei beliebigen ungeradem μ nur bis auf halbe Perioden bekannt.

1) Statt *Berührungs*flächen F_u zu betrachten, [Mo. 18.7.92] werden wir *Osculationsflächen*, *Hyperosculationsflächen* etc. in Untersuchung ziehen können, d.h. solche f_u, welche die Curve überall, wo sie dieselbe treffen, osculiren, hyperosculiren etc. Da wird es sich denn um Umkehrprobleme handeln, in denen die Drittheile, Viertheile der Perioden genau dieselbe Rolle spielen, wie vorhin die Hälften. Und die Zahl der zu unterscheidenden coordinirten Umkehrprobleme wird 3^{2p}, 4^{2p} etc. betragen.

2) Statt der Normalcurve C_{2p-2} der φ mögen wir irgend welche andere Curve C_m des R_r zu Grunde legen und fragen, wann wir bei ihr eine analoge Theorie der Berührungsflächen, Osculationsflächen etc. entwerfen können? Darauf ist ganz einfach zu antworten: Die nothwendige und hinreichende Bedingung ist die, daß die f_u, welche man be-

trachtet, in ihrer Gesammtheit auf der Curve gerade eine *Vollschaar* aequivalenter Punktgruppen ausscheiden. Dabei erinnere man sich, dass dies nach *Nöther* und *Hilbert* bei jeder doppelpunktlosen C_m für alle hinreichend grossen μ der Fall ist. Bei C_m mit Dp. wird man „adjungirte" f_μ in Betracht ziehen müssen. Anderenfalls hat man bei ihnen, was ich nicht ausführe, neben den Integralen erster Gattung noch diejenigen Integrale dritter Gattung in Betracht zu ziehen, deren Unstetigkeitsstellen in den Doppelpunkten liegen (Clebsch-Gordan's „erweitertes Umkehrproblem"; vergl. die Auffassung von pag. 110, 111, der Winterautographie).

B. Von den Thetafunctionen.

Indem ich mich anschicke, nun Einiges über Thetafunctionen anzugeben, muss ich mich noch mehr auf ein blosses Referat beschränken, als vorhin. Ich will vorweg angeben, dass für die Sätze, welche ich entwickele, *Riemann's* zwei hierher gehörige Arbeiten die Hauptquelle sind (Theorie der Abel'schen Functionen [Theil II], 1857; Ueber das Verschwinden der Thetafunctionen, 1865]; an sie reiht sich dann *Weber's* oft genannte Untersuchung über die Ausnahmfälle in Abel'schen Functionen in Annalen 13 (1878); auch möge man als Einleitung in die hier vorliegenden Fragestellungen Weber's Schrift über Abel'sche Functionen vom Geschlechte drei benutzen (1876).

1. Definition der 2^{2p} Thetafunctionen.

Die Thetafunction, wie wir sie hier betrachten:

$$\vartheta\begin{vmatrix} g_1 \cdots\cdots g_p \\ h_1 \cdots\cdots h_p \end{vmatrix} (j_1 \cdots\cdots j_p;\ \tau_{11} \cdots\cdots \tau_{pp})$$

hängt ab:

erstens von dem Index $\left|{g \atop h}\right|$, den man die Charakteristik nennt. Die $2p$ in demselben auftretenden ganzen Zahlen g, h können jede die Werthe 0 oder $\underline{1}$ bekommen;

zweitens von den p „Variabelen" $j_1 \cdots j_p$; es sind dies unbeschränkt veränderliche Grössen;

drittens von den $\underline{p.p+1}$ „Parametern" $\tau_{\alpha\beta}$, (wo $\tau_{\alpha\beta} = \tau_{\beta\alpha}$). Sei mit Unterscheidung des reellen und imaginären Theiles $\tau_{\alpha\beta} = \tau'_{\alpha\beta} + i\tau''_{\alpha\beta}$. So unterwirft man die $\tau_{\alpha\beta}$, so oft von einer Thetafunction die Rede sein soll, eben der Beschränkung, die uns von den $\tau_{\alpha\beta}$ der Riemann'schen Flächen her bekannt ist; wir verlangen, dass die quadratische Form der Variabelen $n_1 \ldots\ldots n_p$: $\Sigma \tau''_{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta$ positiv definit sein soll. Uebrigens sind die „Parameter" $\tau_{\alpha\beta}$ ebensowohl als veränderlich zu denken, wie die „Variabelen" j_α, und es erhält die Theorie der Thetafunctionen erst ihre rechte Beleuchtung, wenn man bald die j_α, bald die $\tau_{\alpha\beta}$ als die eigentlichen Veränderlichen voranstellt.

Die weitere Definition der ϑ sollte nun, wenn wir den

Grundgedanken der Riemann'schen Functionentheorie festhalten wollten, durch Angabe ihrer wesentlichen Eigenschaften geschehen: von der so gewonnenen Definition aus müßten dann u. A. die verschiedenen analytischen Darstellungen, welche man für die Thetafunctionen besitzt, erst abgeleitet werden. Indessen werden wir hier genau so von den Forderungen des Riemann'schen Programm's abweichen, wie dies Riemann selbst bei dieser Frage (in seiner Theorie der Abel'schen Functionen) thut: wir werden einfach die Definition des ϑ durch die bekannte Exponentialreihe voranstellen und an sie diejenigen Eigenschaften des ϑ, die wir hier zu benutzen haben, kurz anknüpfen. Die in Rede stehende Function ist folgende:

$$\vartheta\begin{vmatrix} g \\ h \end{vmatrix}(j_\alpha ; \tau_{\alpha\beta}) = \sum_{-\infty}^{+\infty} {}_{n_1} \cdots\cdots\cdots \sum_{-\infty}^{+\infty} {}_{n_p} \; E_{n_1 \cdots\cdots\cdots n_p},$$

$$E_{n_1 \cdots\cdots n_p} = e^{i\pi\left(\sum_1^p \sum_1^p \tau_{\alpha\beta}\left(n_\alpha + \frac{g_\alpha}{2}\right)\left(n_\beta + \frac{g_\beta}{2}\right) + 2\sum_1^p \left(j_\alpha + \frac{h_\alpha}{2}\right)\left(n_\alpha + \frac{g_\alpha}{2}\right)\right)}$$

Die Convergenz dieser Reihe ist gerade an die Ungleichung für die $\tau_{\alpha\beta}$ gebunden, welche wir diesen Größen ohnehin auferlegten. Wählen wir die $\tau_{\alpha\beta}$ insbesondere als die Perioden der Normalintegrale erster Gattung irgendwelcher vorgegebenen, kanonisch zerschnittenen Riemann'schen Fläche, so bezeichnen wir die entstehende ϑ Function insbesondere als *Riemann'sches Theta.*

2. Functionaleigenschaften der ϑ.

Wir wollen hier nur solche Functionaleigenschaften der ϑ zur Sprache bringen, welche sich auf die Variabelen j_α beziehen. Wir haben da:

a. Die ϑ erscheinen (vermöge der den $\tau_{\alpha\beta}$ auferlegten Ungleichung) als *transcendente ganze Functionen* der j_α.

b. kehrt man alle j_α im Vorzeichen um, so erhält $\vartheta\left|{g \atop h}\right|$ den Factor

$$(-1)^{g_1h_1+g_2h_2+\dots\dots g_ph_p}$$

Die Thetafunction ist also in Abhängigkeit von den j_α *gerade* oder *ungerade*, und zwar jenachdem die Summe $g_1h_1+\dots\dots g_ph_p$ es ist. Von hier aus findet man, daß sich die 2^{2p} Thetafunctionen auf

$$\left.\begin{matrix} 2^{p-1}(2^p+1) & \text{gerade und} \\ 2^{p-1}(2^p-1) & \text{ungerade}\end{matrix}\right\}\text{ vertheilen.}$$

c. Als „Perioden" der j_α betrachten wir eben die Grössen, die uns von den Riemann'schen Flächen her bekannt sind:

	Perioden 1ter Art	Perioden 2ter Art
j_1	$1\ 0\ 0 \dots\dots\dots 0$	$\tau_{11} \dots\dots\dots\dots \tau_{1p}$
$\vdots$	$\vdots\ \vdots\ \vdots$	$\vdots \qquad \vdots$
j_p	$0\ 0\ 0 \dots\dots\dots 1$	$\tau_{p1} \dots\dots\dots\dots \tau_{pp}$

d. Vermehrt man die j_α um die k^{te} Periode erster Art, so erhält das einzelne ϑ den Factor

$$(-1)^{g_k}$$

e. Vermehrt man die j_α um die k^{te} Periode zweiter Art, so erhält das einzelne ϑ den Factor

$$(-1)^{h_k} e^{-2i\pi\left(j_k+\frac{\tau_{kk}}{2}\right)}$$

[Fr. 19.7.92.]

3. Von der Potenzentwickelung der ϑ

Als Function der j_α läßt sich $\vartheta\left|{g \atop h}\right|$ vermöge des Maclaurin'schen Satzes in eine nach steigenden Potenzen der j_α fortschreitende Reihe verwandeln, die beim ungeraden ϑ selbstverständlich die Form hat:

$$\vartheta\left|{g \atop h}\right| = (j_1 \cdots\cdots j_p)_1 + (j_1 \cdots\cdots j_p)_3 + (j_1 \cdots\cdots j_p)_5 + \cdots\cdots,$$

beim geraden ϑ aber die andere:

$$\vartheta\left|{g \atop h}\right| = (j_1 \cdots\cdots j_p)_0 + (j_1 \cdots\cdots j_p)_2 + \cdots\cdots;$$

ich habe dabei die Glieder gleicher Dimension je in eine Klammer zusammengefaßt. Da wird man nun in jedem Falle darauf zu achten haben, ob vielleicht einige Anfangsglieder der Potenzentwickelung ausfallen mögen. Dies ist im Allgemeinen keineswegs der Fall: im Allgemeinen beginnen die ungeraden Entwickelungen wirklich mit den Gliedern erster Ordnung, die geraden Entwickelungen mit einem Glied nullten Grades. Aber es giebt besondere Fälle, wo dies anders ist, und um diese bei den folgenden Angaben mit berücksichtigen zu können, wollen wir verabreden, dass die niedersten nicht identisch verschwindenden Glieder der Entwickelung diejenigen vom ϱ^{ten} Grade sein mögen: ϱ ist dabei im ungeraden Falle selbst ungerade, im geraden Falle gerade.

Das einfachste Beispiel dieser besonderen Fälle liefert wieder das hyperelliptische Gebilde. Bei ihm liegt die Sache folgendermassen. Sei f_{2p+2} diejenige rationale ganze Form $(2p-2)^{ten}$ Grades von z_1, z_2, welche gleich Null gesetzt die $2p+2$ Verzweigungspuncte der hyperelliptischen zweiblättrigen Fläche liefert. Da zeigt sich nun, dass jedes ϑ einer bestimmten Zerspaltung der f in zwei Factoren φ, ψ zugeordnet ist, deren Grad sich nur ein Multiplum von 4 unterscheidet. Und schreiben wir insbesondere:

$$f_{2p+2} = \varphi_{p+1-2\varrho} \cdot \psi_{p+1+2\varrho},$$

so ist die zugehörige ϑ gerade ein solches, dessen Reihenentwickelung mit den Gliedern ϱ^{ter} Ordnung beginnt. Der Sinn dieser Angabe wird am besten klar werden, wenn wir die niedersten Werthe von p einzeln discutiren:

$\underline{p=2}$. f_6. $\varrho=0$. 10 Spaltungen $f_6 = \varphi_3 \cdot \psi_3$. 10 gerade ϑ ohne Besonderheit
$\varrho=1$. 6 Spaltungen $f_6 = \varphi_1 \cdot \psi_5$. 6 ungerade ϑ, ditto
16 ϑ im Ganzen.

$p = 3.$	$\rho = 0.$	35	Spaltungen	$\varphi_4 \cdot \psi_4$	35 gewöhnl. gerade ϑ
f_8	$\rho = 1$	28	"	$\varphi_2 \cdot \psi_6$	28 " ungerade ϑ
	$\rho = 2$	1	"	$\varphi_0 \cdot \psi_8$	1 gerades ϑ, dessen Nullwerth verschwinde
					64 ϑ im Ganzen.
$p = 4.$	$\rho = 0.$	126	"	$\varphi_5 \cdot \psi_5$	126 gerade ϑ
f_{10}	$\rho = 1.$	120	"	$\varphi_3 \cdot \psi_7$	120 ungerade ϑ
	$\rho = 2.$	10	"	$\varphi_1 \cdot \psi_9$	10 gerade ϑ mit verschw. Nullwerth.
					256 ϑ im Ganzen.
$p = 5.$	$\rho = 0$	462	"	$\varphi_6 \cdot \psi_6$	462 gerade ϑ
f_{12}	$\rho = 1$	495	"	$\varphi_4 \cdot \psi_8$	495 ungerade ϑ
	$\rho = 2$	66	"	$\varphi_2 \cdot \psi_{10}$	66 gerade ϑ mit verschw. Nullwerth
	$\rho = 3$	1	"	$\varphi_0 \cdot \psi_{12}$	1 ungerades ϑ, dessen Entwickelung erst m Gliedern 3. Ordn. beginn
					1024 ϑ im Ganzen.

[Di.

4. Beziehungen der besprochenen Potenzentwickelungen zur Theorie der Φ.

Die besprochenen Potenzentwickelungen stehen nun in engster Beziehung zur Theorie der Φ. Unte Beiseitelassung aller Zwischenangaben behaupte ich:

Jedes ϑ, dessen Entwickelung erst mit den Gliedern ρ^{ter} Ordnung beginnt, liefert eine $(\rho-1)$ fach unendliche Schaar von Φ; und andere Φ, als diejenigen welche solcherweise dem einzelnen ϑ zugeordnet sind, gibt es nicht.

Dies soll ein ganz allgemeiner Satz sein, welcher alle speciellen Fälle umfasst. Im "Allgemeinen" wird es ja keine anderen Werthe von ρ geben, als $\rho = 0$ [für die geraden ϑ] und $\rho = 1$ [für die ungeraden ϑ]. Da wird denn unser Satz in Uebereinstimmung mit unseren früheren Angaben behaupten, dass den $2^{p-1}(2^p+1)$ geraden ϑ "im Allgemeinen" keine Φ zugehören, jeder einzelnen der $2^{p-1}(2^p-1)$ ungeraden Function aber eine endliche Zahl, nämlich ein einzige Φ. In den aufgezählten hyperelliptischen Fällen aber wird sich die Sache so gestalten:

Bei $p = 2$ gilt die allgemeine Theorie.

Bei $p = 3$ gibt es einmal den 28 ungeraden ϑ entsprechend 28 isolirte Φ, dann aber der einen ausgezeichneten geraden ϑ entsprechend eine einfach unendliche Schaar.

Bei $p = 4$ haben wir 120 isolirte Φ und dann noch 10 einfach unendliche Schaaren.

Bei $p = 5$ endlich 495 isolirte Φ, 66 einfach unendliche Schaaren, eine zweifach unendliche Schaar.

Die hiermit über die hyperelliptischen Fälle gemachten Angaben werden wir übrigens leicht bestätigen, wenn wir den ganz elementaren Ansatz machen. Ein Integral erster Gattung beim hyperelliptischen Gebilde stellt sich in der

Form dar:

$$w = \int \frac{\varphi_{p-1}(z_1, z_2) \cdot (z\,dz)}{\sqrt{f_{2p+2}(z_1, z_2)}};$$

die "hyperelliptischen φ" sind also den ganzen rationalen Formen $(p-1)^{\text{ten}}$ Grades von z_1, z_2 proportional zu setzen. Eine solche Form liefert auf der z Ebene $p-1$ Nullstellen und damit auf der übe der z Ebene ausgebreiteten hyperelliptischen Fläche $2p-2$ Nullstellen, wie es sein muss. Wann nun werden diese $2p-2$ Nullstellen auf der Fläche paarweise zusammenfallen und sich das φ also in ein Φ verwandeln? Da bildet sich offenbar die doppelte Möglichkeit, dass entweder die einzelne Nullstelle der z Ebene mit einem Verzweigungspuncte der hyperelliptischen Fläche zusammenfällt, oder dass zwei Nullstellen in der z-Ebene selbst zusammenrücken. Wir haben dementsprechend den Ansatz:

$$\Phi = \varphi_{p+1-2\varrho} \cdot (\chi_{\varrho-1})^2, \quad (\varrho \geqq 1),$$

unter $\varphi_{p+1-2\varrho}$ einen Factor $(p+1-2\varrho)^{\text{ten}}$ Grades von f_{2p+2}, unter $\chi_{\varrho-1}$ eine beliebige rationale ganze Form $(\varrho-1)$ ten Grades von z_1, z_2 verstanden. Indem wir nun aus f_{2p+2} alle möglichen Factoren $\varphi_{p+1-2\varrho}$ herausheben, erhalten wir für $p = 2, 3, 4, 5 \ldots\ldots$ genau dieselbe Aufzählung der existirenden Φ, welche wir soeben von unserem allgemeinen auf die ϑ Functionen bezüglichen Satze

Satze aus gemacht haben.

Es liegt mir daran, diese Angaben über die [Fr. 21. 7. 92.] Φ der hyperelliptischen Gebilde doch auch noch geometrisch, unter Zugrundelegung der Normalcurve der φ, auszusprechen, damit nämlich völlig deutlich sei, wie sich hier der hyperelliptische Fall als Specialfall in den allgemeinen einordnet. Offenbar wird das durch die vorstehende Formel gegebene Φ gleich Null gesetzt eine „Ebene" vorstellen, welche die Normalcurve der φ einerseits in $(p+1-2\varrho)$ der $2p+2$ auf der Curve befindlichen Scheitel schneidet, andererseits in $\varrho-1$ beliebig zu wählenden Punkten berührt. Dementsprechend werden wir (um wieder bei den niederen Fällen zu bleiben) bei $p=3, 4, 5$ folgende Verhältnisse haben:

Bei $p=3$ haben wir einen doppeltzählenden Kegelschnitt mit 8 Scheiteln. Es giebt erstlich 28 einzelne Φ, den 28 ungeraden ϑ entsprechend, das sind die 28 Verbindungsgeraden der 8 Scheitel. Dann eine Schaar von ∞^1 Φ, entsprechend dem einen geraden ϑ mit $\varrho=2$: die sämmtlichen Tangenten des doppeltzählenden Kegelschnittes.

Bei $p=4$ haben wir doppeltzählende Raumcurve 3. Ordnung mit 10 Scheiteln. Als Φ haben wir anzusehen: erstens die 120 Ebenen, welche durch 3 der 10 Scheitel hindurchgehen; dieselben entsprechen den 120 geraden ϑ; zweitens die sämmtlichen Tangentialebenen der 10 Kegel zweiten Grades, durch welche die Raumcurve dritter Ordnung von den 10 Scheiteln aus projicirt wird; dieselben entsprechen den 10 geraden ϑ mit $\rho = 2$.

Bei $p = 5$ haben wir doppeltzählende C_4 des R_4 mit 12 Scheiteln. Da giebt es an Φ:

den gewöhnlichen ungeraden ϑ $(\rho = 1)$ entsprechend 495 Ebenen durch 4 Scheitel;

den geraden ϑ mit $\rho = 2$ entsprechend 66 Schaaren von Ebenen, welche durch 2 der 12 Scheitel hindurchgehen und übrigens die C_4 berühren; dem

ausgezeichneten ungeraden ϑ, welches $\rho = 3$ besitzt, entsprechend: die doppelt unendliche Schaar derjenigen Ebenen, welche die C_4 doppelt berühren.

Wir erkennen hier, warum wir früher den hyperelliptischen Fall bei $p = 3, 4$ noch anstandslos haben gebrauchen können, dagegen bei $p = 5$ eine Schwierigkeit fanden: ausgehend von der allgemeinen Discussion der Φ achteten wir nur auf solche Φ, welche ungeraden ϑ entsprechen, und für diese beginnt ja das Unbestimmtwerden erst bei $p = 5$.

5. Genauer Nachweis der besprochenen Beziehungen.

Wir haben bislang das Entsprechen zwischen den Φ und den für die ϑ geltenden Potenzentwickelungen nur erst im Allgemeinen behauptet; ich werde jetzt die Art des Entsprechens noch genauer festlegen. Man ersetze die $j_1, \cdots j_p$

im ϑ durch differentiale $dj_1 \dots\dots dj_p$. So wird ϑ in erster Annäherung durch das erste Glied einer Potenzentwickelung gegeben sein:

$$\vartheta = (dj_1 \dots\dots dj_p)_\varrho .$$

Hier nun betrachte man dj_α als das Differential des α^{ten} zu unserer Riemann'schen Fläche gehörigen Normalintegrals und schreibe dementsprechend $dj_\alpha = \varphi_\alpha\, dw$. So haben wir $\vartheta = (\varphi_1, \dots\dots \varphi_p)_\varrho\, dw^\varrho$.

Jetzt betrachten wir die Gleichung

$$(\varphi_1, \dots\dots \varphi_p)_\varrho = 0 .$$

Dieselbe stellt eine „Fläche ϱ^{ter} Ordnung" in unserem Raume der φ dar. Und nun behaupte ich: daſs diese Fläche gerade $(\varrho-1)$ fach unendlich viele Tangentenebenen hat,*) und daſs diese $(\varrho-1)$ fach unendlich vielen Tangentenebenen gerade die Φ sind, welche dem gewählten ϑ correspondiren.

Also um zunächst von dem allgemeinen Falle zu sprechen, wo alle geraden ϱ gleich 0 sind, alle ungeraden ϱ gleich 1:

Nur die ungeraden ϑ liefern hier die Φ, jede ein einziges, nämlich durch die Glieder erster Ordnung $(\varphi_1, \dots\dots \varphi_p)_1 = 0$, oder, ausführlicher geschrieben:

$$\left(\frac{d\vartheta}{dj_1}\right)_{0\dots0}\cdot\varphi_1 + \left(\frac{d\vartheta}{dj_2}\right)_{0\dots0}\cdot\varphi_2 + \dots\dots \left(\frac{d\vartheta}{dj_p}\right)_{0\dots0}\cdot\varphi_p = 0 .$$

---

*) Solange also $\varrho < p$ ist unsere Fläche eine „developpable Fläche" des R_{p-1}, man könnte sagen: von der $(p-\varrho)^{\text{ten}}$ „Stufe".

Haben wir erst einmal für irgendwelche kanonische Zerschneidung der Riemann'schen Fläche $\tau_{\alpha\beta}$ numerisch berechnet und beherrschen die zugehörige ϑ, so haben wir zugleich die Gleichung $2^{p-1}(2^p-1)^{\text{ten}}$ Grades, von der die Bestimmung der zugehörigen Φ abhängt, vollständig aufgelöst.

Dann aber, um doch einen höheren Fall in Betracht zu ziehen: Wir wollen annehmen, es sei $p=4$ und für eines der zugehörigen geraden ϑ $\varrho=2$. Wir erhalten dann in der Gleichung:

$$\left(\frac{d\vartheta}{dj_1^2}\right)_{0\ldots0}\cdot\varphi_1^2+2\left(\frac{d\vartheta}{dj_1\,dj_2}\right)_{0\ldots0}\cdot\varphi_1\,\varphi_2+\ldots\ldots\ldots\ldots=0$$

einen Kegel zweiten Grades des R_3, deſsen sämmtliche Tangentenebenen Ebenen Φ für die in Betracht kommende C_6 sind.

Es ist dies offenbar der Fall, wo die F_2, welche die C_6 trägt, in einen Kegel, – eben den Kegel, deſsen Gleichung wir hingeschrieben haben, ausartet. In der That ist jedenfalls dieses von vornherein klar, daſs die C_6, welche der Schnitt eines solchen Kegels mit einer f_3 ist, die sämmtlichen Tangentialebenen des Kegels zu dreimal berührenden Ebenen, d.h. zu Φ besitzt.

[Fr. 22. 7. 92]

6. Fortschritte, die hiermit in der Theorie der Φ erzielt sind.

Wir werden erstlich folgendermaſsen sagen dürfen: Zur

Bestimmung der φ hatten wir die 2^{2p} Umkehrprobleme:

$$j_\alpha^{x_1,k} + j_\alpha^{x_2,k} + \dots\dots j_\alpha^{x_{p-1},k} \equiv \frac{k_\alpha}{2} + \Sigma \varrho_\beta \frac{P_{\alpha\beta}}{2} + \Sigma \varrho'_\beta \frac{P'_{\alpha\beta}}{2};$$

wir sehen jetzt genau, welche dieser Umkehrprobleme, je nach der Potenzentwickelung der ϑ überhaupt eine Lösung haben, bez. wie vielfach unendlich die Schaar der möglichen Lösungen ist.

Wir werden dann aber fortfahren: In den vorstehenden Gleichungen waren die $\frac{k_\alpha}{2}$ nur erst modulo halber Perioden bestimmt gewesen, und es hatten dementsprechend die „Characteristiken" $\varrho_\beta, \varrho'_\beta$, die wir dem einzelnen φ (bez. der einzelnen Schaar von φ) zuordnen, keine absolute, sondern nur eine relative Bedeutung. Jetzt, wo wir von den ϑ ausgehen, werden wir nicht zweifelhaft sein, dass wir den φ je diejenigen $\varrho_\beta, \varrho'_\beta$ beilegen müssen, welche zusammengenommen die Characteristik $\left|\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right|$ der zugehörigen ϑ-Function ausmachen: $\varrho_\beta = g_\beta$, $\varrho'_\beta = h_\beta$. Die Characteristiken der φ werden hiermit absolut fixirt. Es kommt dies darauf hinaus, dass wir fortan die $\frac{k_\alpha}{2}$ als Grössen ansehen können, welche modulo ganzer Perioden festgelegt sind.

Uebrigens nennen wir die so gewonnenen absoluten Characteristiken der φ wegen des Zusammenhangs der ϑ-Functionen mit der Primform (den wir oben bei Gelegenheit streiften und auf den wir hier leider nicht ausführlicher eingehen können) Prim-Characteristiken.*)

---

*) Dabei entsprechen den früheren ϱ_β jetzt die h_β, den früheren ϱ'_β die g_β.

Mit dieser Fixirung der $k_{\frac{\alpha}{2}}$ werden dann nach der auf p. 230 zugefügten Bemerkung alle F_μ ungerader Ordnung ebenfalls absolute Charakteristiken erhalten, die wir als ihre Primcharakteristiken bezeichnen (während es bei den F_μ gerader Ordnung bei den früher eingeführten Elementar-Charakteristiken sein Bewenden hat.) Durch ihre Primcharakteristiken erscheinen dann die 2^{2p} Systeme von F_μ, die es bei einem beliebigen ungeraden $\mu > 1$ giebt, den 2^{2p} ϑ-Functionen einzeln zugeordnet. Damit ist denn für die Realitätsdiscussion, zu der wir uns jetzt wieder zurückwenden, das Princip gegeben, daſs wir die Realität der F_μ gerader Ordnung direct mit der Realität der ϑ-Functionen in Verbindung setzen können. Andererseits wird die Aufgabe entstehen, jedem reellen Φ oder F_μ ungerader Ordnung, welches wir bei gegebener reeller Curve construiren mögen, diejenige Primcharakteristik wirklich hinzuzusetzen, welche daſselbe bei Zugrundelegung irgend welcher kanonischen Zerschneidung der zur Curve gehörigen Riemann'schen Fläche erhält. Die entsprechende Aufgabe wird man selbstverständlich auch für die Elementarcharakteristiken der geraden F_μ stellen. So erweitern sich hier die Probleme der Realitätsdiscussion in demselben Maaſse, als wir neue Hülfsmittel für ihre Behandlung zur Hand haben.

C. Realitätsdiscussion vom hyperelliptischen Gebilde aus.

Wir kehren hier zunächst noch einmal zur ausschlieſslichen Betrachtung der Φ und zu derjenigen Methode zurück, welche wir früher die hyperelliptische nannten. Es wird sich darum handeln, für die verschiedenen reellen hyperelliptischen Gebilde, die es giebt, also für die Gebilde mit

$0, \quad 2, \quad 4, \ldots\ldots\ 2p+2$ reellen Verzweigungspunkten, die Realität der zugehörigen Φ zu discutiren, und von da auf die allgemeinen diasymmetrischen Curven mit

$0, \quad 1, \quad 2, \ldots\ldots\ p$ Symmetrielinien, sowie die orthosymmetrischen Curven mit 1 oder 2, bez. mit $(p+1)$ Symmetrielinien den Schluſs zu machen. Der erste Theil dieser Aufgabe hat selbstverständlich gar keine Schwierigkeit; nachdem wir einmal durch die Formel (p. 240):

$$\Phi = \varphi_{p+1-2\varrho} \cdot (X_{\varrho-1})^2 \qquad (\varrho \geqq 1)$$

die sämmtlichen zum hyperelliptischen Gebilde gehörigen Φ algebraisch festgelegt haben; auch ist die Theorie der Thetafunctionen in keiner Weise nöthig gewesen, um diese Formel zugewinnen. *Dagegen brauchen wir die ϑ für den zweiten Theil unserer Aufgabe.* Wir erfahren nämlich nur von den ϑ aus, welche von den so gewonnenen unendlich vielen Φ des hyperelliptischen Falles die einzelnen Φ des allgemeinen Falles ergeben mögen. Die Regel, welche da entsteht, ist freilich so einfach wie möglich. Im allgemeinen Falle werden nur die ungeraden ϑ und zwar jede eine einzige Φ ergeben. Von den vorbezeichneten Φ des hyperelliptischen Falles gehören aber diejenigen zu ungeraden ϑ, welche ungerades ϱ haben.

Daher denn: *In unseren diasymmetrischen und orthosymmetrischen Fällen werden, allgemein zu reden, so viele reelle Φ vorhanden sein, als sich aus dem f_{2p+2} des zugehörigen hyperelliptischen Falles reelle $\varphi_{p+1-2\varrho}$ mit ungeradem ϱ herausheben laſsen.*

Wenden wir diese Regel auf $p=3,4$ an, so haben wir nur $\varrho=1$ in Betracht zu ziehen, und eben hierin werden wir jetzt den tieferen Grund dafür erblicken, daſs wir früher bei $p=3,4$ mit der hyperelliptischen Methode zwecks Abzählung der Φ ohne Weiteres zu Stande kamen. Um so mehr wollen wir hier den niedersten Fall in Betracht ziehen, wo ϱ gleich 3 werden kann, d.h. den Fall $p=5$. Wir haben da in f_{2p+2} eine Form 12^{ten} Grades von z_1, z_2, bei welcher die Spaltungen $\varphi_4 \cdot \psi_8$ (495 mal) und $\varphi_0 \cdot \psi_{12}$ (1. mal) in Betracht kommen. Die Realitätszählung gestaltet sich nun folgendermaſsen:

[Mo. 25. 7. 92.]

	Verzweigungspunkte						
Arten des reellen hyperell. Gebildes:	$0+6\cdot\bar{2}$	$2+5\cdot\bar{2}$	$4+4\cdot\bar{2}$	$6+3\cdot\bar{2}$	$8+2\cdot\bar{2}$	$10+1\cdot\bar{2}$	$12+0\cdot\bar{2}$

Reelle $\varphi_4\,\psi_8$	$\frac{6\cdot5}{2}$ 15	$5+\frac{5\cdot4}{2}$ 15	$1+\frac{4\cdot3\cdot4}{2}+\frac{4\cdot3}{2}$ 31	$\frac{6\cdot5}{2}+\frac{6\cdot5\cdot3}{2}$ $+\frac{3\cdot2}{2}$ 63	$\frac{8\cdot7\cdot6\cdot5}{1\cdot2\cdot3\cdot4}+\frac{8\cdot7\cdot2}{2}$ $+1$ 127	$\frac{10\cdot9\cdot8\cdot7}{1\cdot2\cdot3\cdot4}$ $+\frac{10\cdot9}{1\cdot2}\cdot1$ 255	$\frac{12\cdot11\cdot10\cdot8}{1\cdot2\cdot3\cdot4}$ 495	
Reelle $\varphi_0\cdot\psi_{12}$	1	1	1	1	1	1	1	
Reelle Φ der hyperellip. Fälle:	16	16	32	64	128	256	496	
zugl. geltend für die diasymmetr. Curven von	ϑ	1	2	3	4	5	–	reellen Zügen was mit den
orthosymmetr. Curven mit	2	–	–	–	–	–	–	

früher für diese Fälle gemachten Angaben übereinstimmt.

Aber nicht nur die Realität der Φ, sondern überhaupt der F_μ ungerader Ordnung ($\mu > 1$) werden wir hier für die genannten diasymmetrischen bez. orthosymmetrischen Curven ohne weiteres bestimmen. Diese F_μ gehen, wie wir lernten, genau den 2^{2p} ϑ parallel, so daß $2^{p-1}(2^p-1)$ F_μ erster Art, die den ungeraden ϑ entsprechen, und $2^{p-1}(2^p+1)$ F_μ zweiter Art, die den geraden ϑ entsprechen, zu unterscheiden sind. Die Realität der F_μ erster Art ist natürlich dieselbe wie die der Φ und wird also durch die vorstehende Tabelle mitgeliefert.

Für die F_μ zweiter Art wird man gleicherweise die Zerspaltungen von f_{12} in $\varphi_6\cdot\psi_6$ sowie in $\varphi_2\,\psi_{10}$ in Betracht zu ziehen haben.

Da haben wir zunächst.

Verzweigungspunkte

	$0+6\cdot\bar{2}$	$2+5\cdot\bar{2}$	$4+4\cdot\bar{2}$	$6+3\cdot\bar{2}$	$8+2\cdot\bar{2}$	$10+4\cdot\bar{2}$	$12+0\cdot\bar{2}$
Reelle Factoren 6ten Grades v. f_{12}	$\frac{6\cdot5\cdot4}{1\cdot2\cdot3}$ ↓ 20	$\frac{5\cdot4}{2.}+\frac{5\cdot4}{2}$ ↓ 20	$4+6\cdot6+4$ ↓ 44	$1+15\cdot3$ $+15\cdot3+1$ ↓ 92	$28+140$ $+28$ ↓ 106	210 $+210$ ↓ 420	924 ↓ 924
Entsprechende Spaltungen v. f_{12} in $\varphi_6\,\psi_6$	10	10	22	46	98	210	462
Spaltungen von f_{12} in conjugirt imag. Factoren $\varphi_6\,\psi_6$.	32	0	0	0	0	0	0
Reelle Spaltungen überhaupt.	42	10	22	46	98	210	462
Reelle Spaltungen von f_{12} in $\varphi_2\cdot\psi_{10}$	6	1+5	6+4	15+3	28+2	45+1	66
Gesamtzahl aller hier in Betracht kommenden Spaltungen von f_{12} und also aller F_{12} zweiter Art.	48	16	32	64	128	256	528

Wir addiren hiezu etwa die Zahlen der soeben bestimmten reellen F_μ erster Art:

16 16 32 64 128 256 496.

und erhalten als Gesammtzahlen sämmtlicher F_μ in den verschiedenen Fällen:

64 32 64 128 256 512 1024

also lauter Potenzen von 2, worin wir bald eine Controle für die Richtigkeit unserer Zählungen finden werden.

Wir könnten diese Zählungen ja leicht noch weiter fortsetzen:

indem wir sie für beliebiges p durchführen, statt nur bei $p = 5$.

indem wir die betrachteten F_μ genau so unterscheiden, wie früher die ϕ, nämlich nach den Ovalen der vorgelegten diasymmetrischen oder orthosymmetrischen Curve, welche sie ungeradzahlig berühren,

indem wir neben den F_μ ungerader Ordnung auch F_μ gerader Ordnung in Betracht ziehen. Wir können da ja gar keine Anlehnung an die Theorie der ϑ nehmen, aber es hat keine Schwierigkeit, beim hyperelliptischen Gebilde die F_μ eines ganz beliebigen μ algebraisch hinzuschreiben und dann die bez. Realitätsverhältnisse abzulesen.

Alles dieses aber möge nun unterbleiben, da die Resultate ohnehin aus der nunmehr zu entwickelnden direkten Realitätsmethode folgen.

Nur ein Princip wollen wir der hyperelliptischen Methode für die ferneren Entwickelungen entnehmen: *Die niederste diasymmetrische Curve ($\lambda = 1$ oder 2) stimmen hinsichtlich der Zahl und Art der reellen Φ wie der reellen F_μ nothwendig überein.* Denn beiderlei Curven schliessen den Fall eines reellen hyperelliptischen Gebildes mit lauter imaginären Verzweigungspunkten als Specialfall in sich.

D. Directe Realitätsdiscussion der Φ, F_μ im allgemeinen orthosymmetrischen Falle.

Wir stellen hier den orthosymmetrischen Fall voran, um nicht immer so viele Fallunterscheidungen nebeneinander herführen zu müssen, wir werden über den diasymmetrischen Fall dann hernach kurz referiren, was um so mehr ausreichen wird als, er ja bei der hyperelliptischen Methode bevorzugt ist.

Im Uebrigen handelt es sich um die Methode, welche ich in Bd. 10 der Annalen (1876) zunächst für die ebenen Curven 4. Ordnung entwickelte *) und die dann Dr. *Weichold*

---

*) nachdem ich vorher den einfachen Fall der ebenen Curven 3. Ordnung so behandelt hatte, wie dies in *Clebsch-Lindemann's* Vorlesungen I p. 610 ff. entwickelt und übrigens von Harnack in seiner Dissertation (1874; Ann. 9) in's Einzelne verfolgt wird (Clebsch selbst hatten diese Realitätsfragen durchaus fern gelegen.

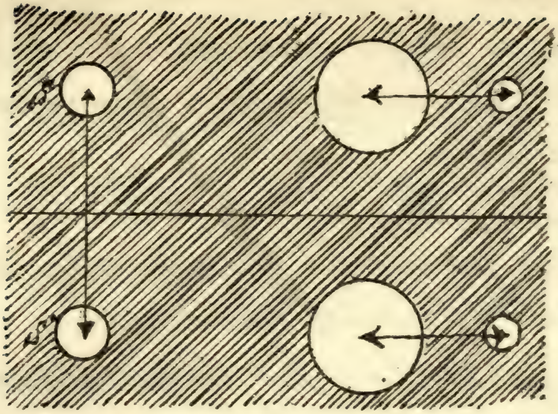
in seiner Leipziger Dissertation von 1883 (vergl. Schlömilchs Zeitschrift, Bd. 28) ganz allgemein für alle orthosymmetrischen und diasymmetrischen Gebilde durchgeführt hat. Hr. Weichold hat dabei nur unterlassen, die geometrischen Folgerungen zu ziehen, die hier unser Hauptinteresse ausmachen; er beschränkt sich darauf, für diese Folgerungen die functionentheoretische Grundlage zu geben.

Diese functionentheoretische Grundlage ist aber kurz gesagt die, *dass wir die Realitätsverhältnisse derjenigen Normalintegrale j_α und Perioden $\tau_{\alpha\beta}$ discutiren, die bei vorgegebener symmetrischer Riemann'scher Fläche entstehen, sobald man ein noch näher zu beschreibendes symmetrisches kanonisches Querschnittsystem auf derselben zu Grunde legt.* Von da aus werden dann einerseits diejenigen Umkehrprobleme, die zu den F_α gehören, andererseits die Thetafunctionen der Fläche in Bezug auf Realität zu untersuchen sein. Dabei wird sich dann nicht nur die Gesammtzahl der reellen F_α (immer unter Einschluss der ϑ) ergeben, sondern auch eine directe Einsicht in ihre Eintheilung in Arten (je nach der Zahl und Lage der Ovale, welche sie ungeradzahlig berühren).

Der erste Schritt sei, die geschlossene Riemann'sche Fläche vom Geschlechte p mit λ Symmetrielinien durch *ein bestimmtes ebenes Flächenstück* zu ersetzen, auf dem wir dann die verschiedenen Schnitte, die wir auf der Fläche stu- [Di. 26.1.92.]

diren wollen, in übersichtlichster Weise studiren können.

Wolle man die Fläche zunächst etwa längs ihrer λ Symmetrielinien zerschneiden. Sie zerfällt dann, weil wir sie als orthosymmetrisch voraussetzen, in zwei symmetrische Hälften. Auf einer derselben bringen wir nun nach Belieben $\frac{p+1-\lambda}{2}$ einander nicht begegnende, die Fläche nicht weiter zerstückende Rückkehrschnitte an. Sodann auf der anderen Hälfte die zu diesen Schnitten symmetrischen $\frac{p+1\lambda}{2}$ Rückkehrschnitte. Endlich fügen wir die beiden Hälften wieder längs irgendeiner der λ Symmetrielinien die wir fortan die „ausgezeichnete" Symmetrielinie nennen wollen, an einander. So haben wir schliesslich eine durchaus zusammenhängende Fläche mit p nach einem gewissen Symmetrieprincip gewählten Rückkehrschnitten gewonnen. Diese kann als 2p fach zusammenhängende Fläche mit 2p Randcurven schlicht in die Ebene ausgebreitet werden [wir meinen nicht durch conforme Abbildung, was erst zu untersuchen bliebe, sondern durch irgendwelche stetige Beziehung, im Sinne der Analysis situs.] Wir werden die Ausbreitung so wählen, dass sich die „ausgezeichnete" Symmetrielinie vielleicht als horizontale Gerade darstellt, bezüglich deren die beiden symmetrischen Hälften der Fläche spiegelbildlich zusammengeordnet scheinen. Die ebene Figur, welche solcherweise entsteht, mag durch folgende Zeichnung vorgestellt werden:



Dieselbe soll eine die ganze Ebene überdeckende Membran mit $2p$ Oeffnungen vorstellen, die symmetrisch zur Mittellinie angebracht sind. Die orthosymmetrische Fläche, um welche es sich handelt, entsteht, indem man diese Oeffnungen, d.h. ihre Ränder, paarweise zusammengefügt denkt, so wie es durch die Pfeile der Figur angedeutet ist. Da haben wir zunächst $2(\lambda-1)$ Oeffnungen (z.B. S, S' in der Figur), bei denen die bez. Pfeile vertical stehen, bei denen also je zwei symmetrische Oeffnungen zusammengeordnet sind.

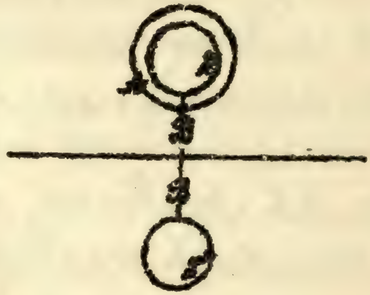
Dann aber $4 \cdot \frac{p+1-\lambda}{2}$ Oeffnungen, wie deren ein Quadrupel in der Figur rechter Hand gezeichnet ist. Hier werden zwei Randcurven der positiven Hälfte unserer Membran einander irgendwie zugewiesen, und dann die entsprechenden Randcurven der negativen Hälfte in genau symmetrischer Weise.

Auf der so versinnlichten orthosymmetrischen Fläche verabreden wir nun ein bestimmtes kanonisches Querschnittsystem von Schnitten

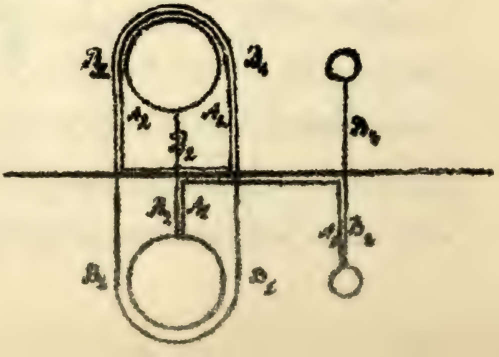
$$A_1, B_1, A_2, B_2, \dots\dots\dots A_p, B_p,$$

wo jedes A sein zugehöriges B in einem Punkte überkreuzt, die Schnitte aber sonst sich nicht begegnen. $(\lambda-1)$ dieser Paare A, B mögen den $(\lambda-1)$ Randcurvenpaaren S, S' einzeln zugeordnet werden, die übrigen $p+1-\lambda$ zu je zwei den $\frac{p+1-\lambda}{2}$ Quadrupeln der übrigen Randcurven. Folgendermassen:

Wir wählen bei jedem Paare S, S' die zugehörigen A, B so, wie es in der nebenstehenden Figur hervortritt: man beachte, dass das hier gezeichnete B, auf die geschlossene Fläche übertragen, in der That eine geschlossene Curve vorstellt.



Andererseits bei jedem Quadrupel der anderen Randcurven zwei Paare von Schnitten $A_1, B_1; A_2, B_2$, so, wie es hier nebenstehend gezeichnet ist. Hier erscheint B_2 zunächst in zwei verschiedene



Stücke zerschnitten, man erkennt aber bald, daſs er vermöge der Zusammengehörigkeit unserer Randcurven auf der geschlossenen Fläche wieder nur einen in sich zurücklaufenden Schnitt vorstellt.

Wir mögen diese Figuren folgendermaſsen beschreiben.

Der Schnitt A der ersten Figur ist selbst eine Symmetrielinie.

Die Schnitte B, B_1, B_2 sind alle drei „sich selbst symmetrische" Curven, welche zweimal eine Symmetrielinie überkreuzen.

Die Schnitte A_1, A_2 der zweiten Figur bestehen je aus einem Stück der ausgezeichneten Symmetrielinie und aus der „Hälfte" von B_2, bez. B_1.

Wir untersuchen jetzt die *Periodicität*, welche irgend welches *reelle* Integral erster Gattung bei Durchlaufung der A, B ...... darbietet. Dabei beachte man von vornherein, daſs „Durchlaufung" von A, bei dem ausgeführten kanonischen Schnittsystem so viel ist wie „Ueberschreitung von A_1", daſs also die Durchlaufung der A, B gerade diejenigen „Perioden" liefert, welche wir bei unserem Integral werden in Betracht ziehen wollen. Wir stellen folgende zwei einfache Grundsätze voran:

Leitet man w an einem Stücke einer Symmetrielinie hin, so entsteht ein reeller Betrag.

Leitet man w längs zweier zu einander symmetrischer Wege, so entstehen Beträge, welche zu einander conjugirt imaginär sind.

Da ist denn klar:

Die Durchlaufung des A der ersten Figur ergiebt für w eine *reelle* Periode.

Die Durchlaufung der B, B_1, B_2 ergiebt *rein imaginäre* Perioden. Ist nämlich $(a+ib)$ der Betrag, den w giebt, wenn es längs der „Hälfte" von B hingeleitet wird, so entsteht bei Hinleitung von w längs der anderen Hälfte $(-a+ib)$, würde doch nach unserem zweiten Grundsatze $(a-ib)$ resultiren, wenn bei Durchlaufung der zweiten Hälfte auch noch der Integrationssinn umgekehrt würde. Beides zusammen giebt aber $2ib$. Die analogen bei B_1, B_2 resultirenden Beträge nennen wir vorübergehend $2ib_1$, $2ib_2$.

Endlich, was die Durchlaufung der A_1, A_2 der zweiten Figur angeht, so nenne man die entstehenden Beträge $\alpha_1 + i\beta_1$, $\alpha_2 + i\beta_2$. Da rühren die imaginären Bestandtheile $i\beta_1$, $i\beta_2$ ersichtlich nur davon her, daſs A_1 die Hälfte von B_2, A_2 die Hälfte von B_1 in sich schlieſst. *Dieserhalb ist $\beta_1 = b_2$, $\beta_2 = b_1$.*

Wir wählen jetzt irgend p linear unabhängige reelle Integrale erster Gattung $w_1, w_2, \dots w_p$ aus, und suchen aus ihnen die *Normalintegrale* $j_1, \dots j_p$ zusammenzusetzen, d.h. Integrale, welche bei Ueberschreitung der $A_1 \dots\dots A_p$ das Periodicitätschema darbieten:

$$\begin{array}{c|cccc} & A_1 & & \dots\dots & A_p \\ \hline j_1 & 1 & 0 & \dots\dots & 0 \\ j_2 & 0 & 1 & \dots\dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ j_p & 0 & 0 & \dots\dots & 1 \end{array}$$

Sei etwa

$$j_\alpha = c_{\alpha 1} w_1 + c_{\alpha 2} w_2 + \dots\dots\dots\dots c_{\alpha p} w_p.$$

Wir werden dann zur Bestimmung der $c_{\alpha\beta}$ p lineare Gleichungen bekommen, indem wir die Perioden vergleichen, welche einerseits j_α, andererseits die lineare Verbindung der w bei Durchlaufung der verschiedenen w darbietet. Letztere Perioden sind, wie wir wissen, alle rein imaginär. Daher der wichtige Satz: *Die $c_{\alpha\beta}$ der vorhandenen Gleichungen sind alle* rein imaginär.

Wir werden kurz sagen dürfen, *daſs die Normalintegrale j_α selbst rein imaginär sind.*

Um doch mit reellen Integralen zu thun zu haben, setzen wir $j'_\alpha = i\, j_\alpha$.

[Do. 28. 1. 92] Die j'_α bieten dann an den $A_1 \ldots\ldots A_p$ das folgende Periodenschema dar

	A_1		…	A_p
j'_1	i	0	…	0
j'_2	0	i	…	0
j'_p	0	0	…	i

an den $B_1 \ldots\ldots B_p$ aber das nachstehende:

	B_1 …	… B_p
j'_1	$-\tau''_{11}+i\tau_{11}$	$-\tau''_{1p}+i\tau'_{1p}$
j'_p	$-\tau''_{1}+i\tau'_{p1}$	$-\tau''_{pp}+i\tau'_{pp}$

wo die Bezeichnung $\tau_{\alpha\beta} = \tau_{\alpha\beta} + i\tau''_{\alpha\beta}$ in früherer Weise gebraucht ist. Und nun ist das Wesentliche, daſs uns die vorangehenden Betrachtungen ohne weiteres ermöglichen, *die imaginären Bestandtheile dieses zweiten Periodenschemas anzugeben*. Entsprechend der Construction unseres Querschnittsystems unterscheiden wir $(\lambda-1)$ Querschnitte B des ersten Typus: diese mögen bei unserem Schema voranstehen und also mit $B_1, B_2, \ldots\ldots B_{\lambda-1}$ benannt sein, und $\frac{p-\lambda+1}{2}$ Paare Querschnitte B des zweiten Typus, von denen jedesmal zwei zusammengehörige unmittelbar aufeinander folgen müſsen, so daſs also beispielsweise B_λ und $B_{\lambda+1}$ zusammengehörige B des zweiten Typus sind. Wir haben nun uns die Sätze über die imaginären Theile der Perioden, welche ein beliebiges reelles Integral an den Querschnitten B besitzt, mit den bekannten Perioden, welche unsere j'_α an den A aufweisen, zu combiniren, um für die imaginären Theile $i\tau_{\alpha\beta}$ unseres zweiten Schemas die folgende Tabelle zu erhalten:

	B_1	…	$B_{\lambda-1}$	B_λ	$B_{\lambda+1}$	…	B_{p-1}	B_p
j'_1	0	…	0	0	0	…	0	0.
$j'_{\lambda-1}$	0	…	0	0	0	…	0	0
j'_λ	0	…	0	0	$\frac{i}{2}$	…	0	0
$j'_{\lambda+1}$	0	…	0	$\frac{i}{2}$	0	…	0	0
j'_{p-1}	0	…	0	0	0	…	0	$\frac{i}{2}$
j'_p	0	…	0	0	0	…	$\frac{i}{2}$	0

Die sämmtlichen imaginären Bestandtheile sind gleich Null, bis auf gewiſse Bestandtheile $\frac{i}{2}$ die rechter Hand, bez. linker Hand von der Hauptdiagonale stehen.

Wir betrachten jetzt insbesondere diejenigen Integralwerthe $j_\alpha'^{\,x,\eta}$, welche von einem reellen Punkte η der nullten Symmetrielinie S^0 zu einem rellen Punkte x irgendwelcher Symmetrielinie S_β' hingeleitet sind. Wir kommen von S_0' zu S_β', indem wir die „Hälfte" des zugehörigen Querschnitt's R_β durchlaufen. Hierbei werden die sämmtlichen Integrale j_α' nur um einen reellen Bestandtheil geändert, einzig j_β' wächst um eine Grösse, deren imaginärer Bestandtheil ½ ist. Daher werden also unsere sämmtlichen Integrale $j_\alpha'^{\,x,\eta}$ reell sein mit Annahme des einen, dessen Index mit dem Index der Symmetrielinie übereinstimmt, auf welchem x liegt, und dieses eine hat den imaginären Theil $\frac{i}{2}$. Alles dieses natürlich mod. $P_{\alpha\beta}$, $P'_{\alpha\beta}$ genommen.

Vielleicht bemerken wir noch den entsprechenden Satz, der sich auf die Summe $j_\alpha'^{\,x,\eta} + j_\alpha'^{\,\bar{x},\eta}$ bezieht, unter x $\bar{x}$ zwei symmetrisch gelegene Punkte unserer Fläche verstanden. Wir können uns diese Summe so gebildet denken, dass wir von dem „reellen" Punkte η zu den „conjugirten" Punkten x auf „conjugirten" Wegen hinintegriren. Dann wird unsere Integralsumme nothwendig reell. Schränken wir die Integrationswege in keiner Weise ein, so wird die Integralsumme doch immer mit einer reellen Grösse mod. $P_{\alpha\beta}$, $P'_{\alpha\beta}$ congruent sein müssen.

Betrachten wir jetzt *irgendwelches Umkehrproblem*:

$$j'^{\,x_2,\eta}_\alpha + j'^{\,x_2,\eta}_\alpha + \ldots\ldots \equiv \mathfrak{C}'_\alpha \,(\text{mod. } \mathfrak{P}_{\alpha\beta}, \mathfrak{P}'_{\alpha\beta}) . \; [\alpha = 1, 2, \ldots\ldots p]$$

Wir fragen, wann daſselbe *reell* ist, d. h. durch Punkte $x_1, x_2, \ldots\ldots$ befriedigt werden kann, die, so weit sie nicht einzeln reell sind, sich paarweise als conjugirt imaginäre zusammenordnen. Wir finden nach den vorhergehenden Sätzen ohne weiteres, daſs zu dem Zwecke die $\mathfrak{C}'_\alpha$ entweder direct reell sein müſsen (N.B. sofern wir geeignete Multipla der $\mathfrak{P}_{\alpha\beta}$, $\mathfrak{P}'_{\alpha\beta}$ ihnen zufügen oder von ihnen abziehen) oder auch für die Indices $\alpha = 1, 2 \ldots\ldots (\lambda-1)$ imaginäre Bestandtheile aufweisen dürfen. Zugleich erkennen wir: Ist für $\alpha = 1, 2, \ldots\ldots (\lambda-1)$, das $\mathfrak{C}'_\alpha$ reell, so trägt die Symmetrielinie S_α eine *paare* Zahl reeller Punkte $x_1, x_2, \ldots\ldots$ (d. h. eine Zahl, die auch Null sein kann); enthält dagegen das bezügliche $\mathfrak{C}'_\alpha$ den imaginären Bestandtheil $\frac{i}{2}$, so liegt auf der Symmetrielinie S_α eine *unpaare* Zahl der x (also mindestens eines der x).

Hiermit haben wir nun alles vorbereitet, um bei unseren orthosymmetrischen Curven *die Realität der Berührungsflächen F_μ* ($\mu > 1$) in einfachster Weise discutiren zu können. Wir haben 2^{2p} Schaaren dieser F_μ bestimmt durch die 2^{2p} Umkehrprobleme:

$$j'^{\,x_1,\eta}_\alpha + \ldots\ldots j'^{\,x_{\mu(p-1)},\eta}_\alpha \equiv \frac{\mu k'_\alpha}{2} + \Sigma \varrho_\beta \frac{\mathfrak{P}_{\alpha\beta}}{2} + \Sigma \varrho'_\beta \frac{\mathfrak{P}'_{\alpha\beta}}{2} ,$$

$$[\varrho_\beta, \varrho'_\beta = 0, 1] ,$$

unter $P_{\alpha\beta}$, $P'_{\alpha\beta}$ hier die Perioden der j'_α verstanden. Welche dieser Umkehrprobleme sind reell? Wir constatiren zu dem Zwecke vorab:

Die Grössen k'_α dürfen wir als reelle Grössen ansehen.

In der That ist

$$k'_\alpha \equiv j'^{\,x_1,\eta}_\alpha + j'^{\,x_2,\eta}_\alpha + \dots\dots\dots\dots\; j'^{\,x_{2p-2},\eta}_\alpha$$

unter $x_1, x_2 \dots\dots x_{2p-2}$ die Schnitte verstanden, welche irgend eine „Ebene" des Raumes mit unserer Curve gemein hat. Man nehme diese Ebene reell. Dann werden diejenigen x, welche nicht paarweise imaginär sind, sich in paarer Zahl auf den verschiedenen Symmetrielinien finden müssen. Denn die zugehörigen Curvenzüge haben, wie wir von früher her wissen, alle paaren Character. Daher u.s.w.

[Fr. 27.1.92.] Wir sehen jetzt also die k'_α als reelle Grössen an. Darauf ist die Frage insbesondere nach den reellen Umkehrproblemen unter den 2^{2p} vorgegebenen ohne Weiteres beantwortet! [Wir haben nur einen Blick auf das Schema der Perioden zweiter Art unserer j'_α zu werfen]:

Reell sind die folgenden $2^{p+\lambda-1}$ Umkehrprobleme:

$$j'^{\,x_1,\eta}_\alpha + \dots\dots\; j'^{\,x_{2(p-1)},\eta}_\alpha \equiv \frac{\mu k'_\alpha}{2} + \sum_1^p \varrho_\beta \frac{P_{\alpha\beta}}{2} + \sum_1^{\lambda-1} \varrho'_\beta \frac{P'_{\alpha\beta}}{2},$$

wo also die zweite Summe auf die Werthe $\beta = 1, 2, \dots (\lambda-1)$

eingeschränkt ist. Wir brauchen dies nur für die Werthe α, $\beta > (\lambda-1)$ noch zu erläutern. Ist $\alpha > \lambda-1$, so soll, damit das vorgelegte Umkehrproblem reell sei, rechter Hand eine Gröſse stehen, die modulo der Perioden einer reellen Gröſse aequivalent ist. Dies ist der Fall, mögen wir auch ρ_α z. B. gleich 1 nehmen. Denn der imaginäre Bestandtheil $\frac{i}{2}$, der dadurch in die α^{te} Integralsumme hineinkomt, kann dadurch weggenommen werden, daſs wir jene Periode $P'_{\alpha,\alpha\pm1}$, die selber den imaginären Bestandtheil $\frac{i}{2}$ besitzt, subtrahiren. Dagegen müſsen wir ρ'_α nothwendig gleich 0 nehmen. Anderenfalls erhielten wir bei j'_α einen imaginären Bestandtheil $\frac{i}{4}$, der in keiner Weise durch Zufügen weiterer Perioden weggeschafft werden könnte.

Aber mehr: wir erkennen, welche der Ovale $S'_1, \ldots\ldots S'_{\lambda-1}$ unserer Curve von den F_μ der einzelnen Schaar geradzahlig, welche ungeradzahlig berührt werden. Diejenigen S'_α werden geradzahlig berührt, deren ρ_α verschwindet, diejenigen S'_α ungeradzahlig, deren ρ_α gleich 1 ist $\{\alpha = 1, 2, \ldots (\lambda-1)\}$. Faſsen wir alle Schaaren von F_μ, welche in diesem Verhalten übereinstimmen, zu einer „Art" zusammen, so haben wir offenbar $2^{\lambda-1}$ „Arten" und jede Art enthält die gleiche Zahl 2^p von „Schaaren". Ob endlich die Flächen einer solchen „Art" die ausgezeichnete Symmetrie, linie geradzahlig oder ungeradzahlig berühren, hängt offenbar davon ab, ob die Differenz $\mu(p-1)-\sum_1^{\lambda-1}\rho_\alpha$ eine gerade oder eine ungerade Zahl ist.

Wir wollen doch diese Resultate noch unabhängig von unserem besonderen Schnittsystem aussprechen. Wir unterscheiden unsere F_μ in $F_\mu^{(0)}$, $F_\mu^{(1)}$, $F_\mu^{(2)}$, ... je nachdem sie 0 oder 1 oder 2, ... unserer Ovale ungeradzahlig berühren. Natürlich giebt es $F_\mu^{(0)}$, $F_\mu^{(1)}$, ... nur dann, wenn $\mu(p-1)$ ungerade. Die 0, 1, 2, ... Ovale, welche ungeradzahlig berührt werden sollen, mögen dabei irgendwie unter den λ vorhandenen Ovalen heraus gesucht werden. Ich nenne die zugehörigen Schaaren von F_μ dann eine combinatorisch mögliche Art. Unser Resultat läßt sich dann so in Worte fassen: daß jede combinatorisch mögliche Art reeller F_μ existirt und immer die gleiche Zahl 2^p unterschiedener Schaaren umfaßt. Um zu specificiren nehme man etwa die ebene C_4, also $p=3$. An orthosymmetrischen Arten haben wir da die Gürtelcurve ($\lambda=2$) und die viertheilige Curve ($\lambda=4$). Nun betrachten wir etwa die Berührungskegelschnitte (F_2). Wir unterscheiden $F_2^{(0)}$ und $F_2^{(2)}$, $F_2^{(4)}$. Zu den ersteren gehören offenbar die doppelt zählenden Geraden der Ebene. Wollen wir von diesen absehen. Wir erfahren dann:

Bei der Gürtelcurve giebt es 7 Schaaren eigentlicher $F_2^{(0)}$ und 8 Schaaren von $F_2^{(2)}$, bei der viertheiligen Curve dagegen 7 Schaaren eigentlicher $F_2^{(0)}$, 8 Schaaren von $F_2^{(2)}$ für jedes der 6 Paare von Ovalen, die wir unter den 4 Ovalen der Curve heraussuchen können, endlich 8 Schaaren von $F_2^{(4)}$.

Das stimmt mit den Resultaten, welche Crone in Bd. 12 der Math. Annalen (1877) betreffs dieser Berührungskegelschnitte auf geometrischem Wege abgeleitet hat.

Wir kommen endlich zu den F_1, d. h. den Φ.

Deren Theorie ist ja, wie wir wissen, von den 2^{2p} Umkehrproblemen aus:

$$j'^{\,x_1,h}_{\alpha} + \cdots\cdots j'^{\,x_{p-1},h}_{\alpha} \equiv \frac{k'_\alpha}{2} \sum \rho_\beta \frac{P_{\alpha\beta}}{2} + \sum \rho'_\beta \frac{P'_{\alpha\beta}}{2}$$

nicht ohne weiteres zugänglich. Andererseits haben wir die bezügliche Realitätsdiscussion früher so weit vorbereitet, dass nur einer von 2 Sätzen zu beweisen blieb. Es handelte sich (hier, bei den orthosymmetrischen Curven) entweder darum, zu zeigen, dass die Gesammtzahl der reellen Φ $2^{p-1}(2\lambda-1)$ beträgt, oder aber darum, bei jener besonderen orthosymmetrischen Curve, bei welcher sich eines der λ Ovale zu einem isolirten Doppelpunkte zusammengezogen hat, die Gesammtzahl derjenigen reellen Φ, welche nicht durch den Doppelpunkt gehen, als $2^{p+\lambda-3}$ festzustellen. Beides können wir vermöge unserer Abel'schen Entwickelungen jetzt in der That leicht bestätigen. Wir beginnen dabei mit dem zweiten Nachweis, weil wir bei ihm mit der Betrachtung der Umkehrtheoreme reichen, während wir für den ersten Nachweis die Thetareihen werden heranziehen müſsen.

Wir handeln also zunächst von der *Curve mit Doppelpunkt* (was nach den früheren Entwickelungen voraussetzt, daſs $\lambda > 1$; die nur aus einem reellen Zuge bestehende orthosymmetrische Curve, die im Falle eines geraden p auftritt, werden wir hier also bei Seite laſsen; übrigens erledigt sich die hinterher durch eine leichte Nebenbemerkung). [Mo. 1.8.92.]

Da wollen wir die Bemerkung voranstellen, *daſs sich die vorher gegebene Theorie der F_μ sehr verallgemeinern läſst.*

Weſshalb konnten wir die F_μ vermöge der 2^{2p} Umkehrprobleme discutiren? Weil die f_μ ($\mu > 1$) aus unserer Curve eine Schaar aequivalenter Punktgruppen ausschneiden, welche gleichzeitig eine *Vollschaar* und eine *Generalschaar* ist. Habe man also irgendwelche f, welche auf unserer Curve neben festen Punkten ebenfalls eine Schaar solcher aequivalenter Punktgruppen ausschneiden, welche eine Vollschaar und Generalschaar bilden. Mit F bezeichnen wir diejenigen f, deren bewegliche Schnittpunkte mit unserer Curve paarweise zusammengerückt sind. *Ueber diese F werden wir dann ganz analoge Realitätstheoreme aufstellen können, wie eben für die F_μ. Insbesondere ist die Gesammtzahl der reellen F gleich $2^{p+\lambda-1}$.*

Von dieser Verallgemeinerung haben wir nun blos specielle Anwendung auf unsere Curve mit Doppelpunkt zu machen. Unsere Curve mit Doppelpunkt stellt, wie wir wiſsen, eine solche orthosymmetrische Curve unseres Raumes von $(p-1)$ Dimensionen dar, welche $(\lambda-1)$ reelle Züge besitzt. Auf dieser Curve schneiden nun die Ebenen unseres Raumes eine G^{p-1}_{2p-2} aus, d.h. gerade eine Vollschaar aequivalenter Punktgruppen G_{2p-2}, welche eine Generalschaar (keine Specialschaar) ist. Daher giebt es $2^{(p-1)+(\lambda-1)-1}$, d.h. $2^{p+\lambda-3}$ reelle Ebenen, welche unsere Curve überall berühren, wo sie treffen. *Das ist aber gerade, was bewiesen werden sollte.* Denn die überall sonst berührenden Ebenen, welche durch den Doppelpunkt der Curve gehen, zählen hier nicht mit.

(Die Nebenbemerkung, durch die wir die Φ im Falle der eintheiligen orthosymmetrischen Curve eines geraden p erledigen, ist die: es könnte sich darum um reelle Φ, handeln. Andererseits wiſsen wir, daſs die Theorie unserer Curve, was die Realitätsverhältniſse angeht, mit der Theorie der nulltheiligen Curve stimmen muſs. Aber bei dieser kann es nimmermehr reelle Φ, geben. Daher ist auch bei der vorgegebenen Curve die Zahl der reellen Φ, und damit überhaupt die Zahl der reellen $\Phi = 0$).

Wir handeln ferner von der *Bestimmung der Φ durch die Thetafunctionen.* Wir hatten die Thetafunctionen durch die Reihen definirt:

$$\vartheta\begin{vmatrix} g \\ h \end{vmatrix} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \sum_{-\infty}^{+\infty} \cdots e^{i\pi\left[\sum\left(n_\alpha+\frac{g_\alpha}{2}\right)\left(n_\beta+\frac{g_\beta}{2}\right)\tau_{\alpha\beta}+2\sum\left(n_\alpha+\frac{g_\alpha}{2}\right)\left(j_\alpha+\frac{h_\alpha}{2}\right)\right]};$$

unter ihnen sollten wir insbesondere die ungeraden aussuchen, d.h. diejenigen, für welche $g_1 h_1 + g_2 h_2 + \dots g_p h_p \equiv 1 \pmod{2}$.

Wir beziehen dann unsere Curve der φ auf dasjenige Coordinatensystem, welches durch die Gleichungen definirt ist

$$\varphi_2 : \varphi_2 : \dots \dots \varphi_p = dj_1 : dj_2 : \dots \dots \dots \dots dj_p$$

und haben in

$$\Phi = \left(\frac{\partial\vartheta}{\partial j_1}\begin{vmatrix} g \\ h \end{vmatrix}\right)_{0,0\dots0} \varphi_1 + \left(\frac{\partial\vartheta}{\partial j_2}\begin{vmatrix} g \\ h \end{vmatrix}\right)_{0,0\dots0} \cdot \varphi_2 + \dots\dots \left(\frac{\partial\vartheta}{\partial j_p}\begin{vmatrix} g \\ h \end{vmatrix}\right)_{0,0\dots0} \cdot \varphi_p$$

das einzelne zu dem ungeraden $\vartheta\begin{vmatrix} g \\ h \end{vmatrix}$ gehörige Φ. Hier tragen wir jetzt für die Differentialquotienten des ϑ die Reihenentwickelung ein. Unser Φ wird reell sein, sobald dabei nach Abtrennung irgend eines allen Differentialquotienten gemeinsamen Factors reelle Gröſsen zum Vorschein kommen. Nun wird beispielsweise $\frac{\partial\vartheta}{\partial j_1}\begin{vmatrix} g \\ h \end{vmatrix}$ nach Abtrennung des vom Index 1 unabhängigen Factors $2i\pi \cdot e^{\sum \frac{g_\alpha}{2} \frac{h_\alpha}{2} i\pi}$

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \sum_{-\infty}^{+\infty} \dots\dots 2\left(n_1+\frac{g_1}{2}\right) \cdot e^{i\pi\left[\sum\left(n_\alpha+\frac{g_\alpha}{2}\right)\left(n_\beta+\frac{g_\beta}{2}\right) \cdot \tau_{\alpha\beta} + \sum n_\alpha h_\alpha\right]}$$

ich habe dabei für die $j_1 \dots j_p$ bereits $0 \dots 0$ eingetragen.

Der auftretende Exponentialfactor setzt sich für $\tau_{\alpha\beta} = \tau'_{\alpha\beta} + i\tau''_{\alpha\beta}$ aus den drei Factoren zusammen:

$$e^{i\pi\sum n_\alpha h_\alpha} \quad e^{i\pi\sum\left(n_\alpha+\frac{g_\alpha}{2}\right)\left(n_\beta+\frac{g_\beta}{2}\right)\tau'_{\alpha\beta}} \cdot e^{-\pi\sum\left(n_\alpha+\frac{g_\alpha}{2}\right)\left(n_\beta+\frac{g_\beta}{2}\right)\tau'_{\alpha\beta}},$$

deren erster und dritter an sich reell sind, während zur Beurtheilung des zweiten Factors die Tabelle der $i\tau'_{\alpha\beta}$ herangezogen werden muſs, welche wir auf pag 261 mittheilten. Dieser Tabelle zufolge sind alle $i\tau'_{\alpha\beta}$ gleich Null, für die α oder $\beta < \lambda$, während für $\alpha \geqq \lambda$ oder für $\beta \geqq \lambda$ immer ein $i\tau'_{\alpha\beta}$ auftritt, welches $= \frac{i}{2}$ ist. Die Folge ist, daſs wir, wenn wir Reelles haben wollen, alle g_α, g_β, deren Index $< \lambda$ ist, beliebig laſsen dürfen, alle g_α g_β aber, deren Index $\geqq \lambda$, gleich Null setzen müſsen. Dies ist das ganze hier in Betracht kommende Prinzip. Ihm zufolge bestimmt sich die Gesammtzahl der reellen Φ folgendermaſsen: Wir können $h_\lambda, \ldots\ldots h_p$ jedenfalls beliebig nehmen (da die correspondirenden $g_\lambda, \ldots g_p$ ja Null sein sollen). Dies giebt $2^{p+1-\lambda}$ Möglichkeiten. Wir werden dann die übrigen $g_1, \cdots g_{\lambda-1}, h_1, \cdots h_{\lambda-1}$ sonst auch beliebig, nur so wählen müſsen, daſs $g_1 h_1 + \ldots\ldots + g_{\lambda-1} h_{\lambda-1} \equiv 1 \pmod{2}$. Dies giebt $2^{\lambda-2}(2^{\lambda-1}-1)$ Möglichkeiten. Beides zusammen $2^{p-1}(2^{\lambda-1}-1)$ Möglichkeiten und also

$$2^{p-1}(2^{\lambda-1}-1) \text{ reelle } \Phi.$$

was gerade bewiesen werden sollte.

Wir knüpfen daran noch eine Bemerkung über die reellen F_μ ungerader Ordnung. Wir haben die F_μ in zwei Claſsen getheilt, je nachdem sie einem Φ zugeordnet waren, oder nicht. Nun werden wir bei unserer orthosym-

metrischen Curve die F_u andererseits in
$F_u^{(\lambda)}, F_u^{(\lambda-1)}, F_u^{(\lambda-4)}$ etc.
eintheilen je nach der Zahl der Ovale, welche sie ungeradzahlig berühren: die so unterschiedenen F_u zerfallen dann wieder in Arten, je nach der Auswahl der Ovale, welche sie ungeradzahlig berühren. Endlich enthält jede Art 2^p unterschiedene „Schaaren" von F_u. Dieselben Unterscheidungen haben wir aber früher bei den Φ gemacht. Es ergab sich, daſs $\Phi^{(\lambda)}$ nicht existiren (nämlich bei der orthosymmetrischen Curve), daſs aber alle anderen „combinatorisch möglichen" Arten $\Phi^{(\lambda-2)}, \Phi^{(\lambda-4)}$ etc. vorhanden sind, und jede einzelne dieser „Arten" 2^{p-1} reelle Φ umfaſst. Sonach kommt:

Die $F_u^{(\lambda)}$ sind alle von der zweiten Claſse.
Von den 2^p F_u jederen Art gehört immer die Hälfte der ersten Claſse, die andere Hälfte der zweiten Classe an.

E. Directe Realitätsdiscussion der F_u bez. der Φ in den diasymmetrischen Fällen.

Um jetzt die diasymmetrischen Fälle in entsprechender Weise zu erledigen, stellen wir vor allem den Fall $\lambda = 0$ bei Seite, wir werden hernach auf ihn zurückkommen. Für die anderen Fälle aber können wir genau so verfahren, wie es bei den orthosymmetrischen Fällen geschah. Ich werde die Einzelheiten überspringen und nur kurz referiren.

Erstlich handelt es sich darum, bei Zugrundelegung einer „ausgezeichneten" Symmetrielinie eine „symmetrische" kanonische Zerschneidung der Fläche zu verabreden. Weichhold führt das in der Weise aus, dass er (in unserer Bezeichnung) wieder reelle p Integrale $j'_\alpha = i j_\alpha$ erhält, bei denen man man natürlich nach den imaginären Bestandtheilen der Perioden zweiter Art fragen wird. Und hier bekommt er die folgende Tabelle: [Di 2.8.92]

$$\begin{array}{c|cccc}
 & B_1 \quad\quad\quad & B_{\lambda-1} & B_\lambda \quad\quad\quad & B_p \\
\hline
j'_1 & 0 \ldots\ldots & 0 & 0 \ldots\ldots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
j'_{\lambda-1} & 0 \ldots\ldots & 0 & 0 \ldots\ldots & 0 \\
j'_\lambda & 0 \ldots\ldots & 0 & \frac{i}{2} \ldots\ldots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
j'_p & 0 \ldots\ldots & 0 & 0 \ldots\ldots & \frac{i}{2}
\end{array}$$

Diese Tabelle enthält sonst lauter Nullen, nur die letzten $p+1-\lambda$ Stellen der Hauptintegrale sind mit $\frac{i}{2}$ besetzt.

Von hier aus entwickelt man dann die Theorie der T_μ $(\mu>1)$ genau so, wie vorhin. Es kommen auch genau dieselben Sätze:

Es giebt, Alles in Allem, $2^{p+\lambda-1}$ reelle Schaaren von T_μ, nämlich je 2^p von jeder der $2^{\lambda-1}$ combinatorisch möglichen Arten. Ebenso die Theorie der Φ, wobei man nach Belieben die Doppelpunctsmethode oder die Betrachtung der Thetafunctionen heranziehen kann. Dies eine hat sich ja freilich hier geändert, daſs nur in *allen* combinatorisch möglichen Arten der Φ genau 2^{p-1} Φ vorhanden sein werden. In Folge deſsen modificirt sich der bei den orthosymmetrischen Curven an letzter Stelle angegebene Satz hier dahin, *daſs jetzt unter den 2^p irgend welcher Art angehörigen F_u ungerader Ordnung immer gerade die Hälfte der ersten Claſse, bez. der zweiten Claſse angehören wird.*

Sprechen wir jetzt vom Falle $\lambda = 0$. Da ist jedenfalls dieses anders, daſs jetzt eine andere Art der symmetrischen Zerschneidung angeführt werden muſs, als bisher; denn es kann doch hier, wo überhaupt keine Symmetrielinie vorhanden ist, auch keine Symmetrielinie mehr „ausgezeichnet“ werden.

Weichhold benutzt zur Construction einer bezüglichen Zerschneidung insbesondere solche sich selbst symmetrische Curven, deren beide Ufer sich bei der symmetrischen Umformung vertauschen (und die natürlich keinen einzigen sich selbst symmetrischen Punct enthalten). Er kommt so zu *reellen* Normalintegralen j_α, deren $\tau'_{\alpha\beta}$ so angegeben werden können, wie es in der nachstehenden Tabelle geschieht:

	B_1	B_2	…………	B_p
j_1	0	$\frac{1}{2}$	…………	$\frac{1}{2}$
j_2	$\frac{1}{2}$	0	…………	$\frac{1}{2}$
j_p	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	…………	0

(wo jetzt die 0 nur in der Hauptdiagonale stehen). Von hier aus zählt man natürlich die reellen Φ sofort mit Hülfe der Thetafunctionen ab. Dagegen stößt die Abzählung der reellen F_u darum gleich anfangs auf eine gewisse Schwierigkeit, weil man keine Integrale $j_\alpha^{x,z}$ construiren kann, bei denen der Punkt z ein reeller Punkt wäre. Ich werde um so lieber auf die Durchführung aller dieser Dinge verzichten können, als ja das Resultat von der hyperelliptischen Methode her uns von vornherein bekannt ist. Wir lernten damals, daß bei der nulltheiligen Curve ebensoviele reelle Φ, bez. Schaaren F_u vorhanden sind, wie bei der niedersten orthosymmetrischen Curve des betr. Geschlechtes. Nun beachte man noch, daß letztere eintheilig oder zweitheilig ist, jenachdem p gerade oder ungerade. Das Resultat ist schließlich dieses

p gerade: Es giebt bei unserer nulltheiligen Curve keine reellen Φ und 2^p reelle Schaaren von F_u.

p = ungerade: Es giebt 2^{p-1} reelle Φ und 2^{p+1} reelle Schaaren von F_μ *).

F. Von der Vertheilung der Characteristiken auf die einzelnen Schaaren reeller F_μ, bez. die reellen Φ.

Wir besprechen hier noch eine letzte Frage. Unsere Theorie der Abel'schen Functionen ergab nicht nur die Gesammtzahl reeller Schaaren von F_μ etc., sondern für jede dieser Schaaren etc. auch eine bestimmte Characteristik: nämlich eine Elementarcharakteristik, wenn μ gerade, eine Primcharakteristik, wenn μ ungerade ≥ 1. **) Natürlich hängt dieselbe nicht nur von der gegebenen Curve als solcher ab, sondern auch von der Zerschneidung, welche wir für die zur Curve gehörige Riemann'sche Fläche in Aussicht nehmen mögen. Um so intereſsanter wird es sein, jeder F_μ oder Φ, welche wir reell bei gegebener Curve aufweisen mögen, nach Festlegung der zu wählenden Zerschneidung die ihr zugehörige Charakteristik wirklich hinzuzusetzen.

---

*) Vielleicht kann man noch bemerken, dass es von der hyperelliptischen Methode aus möglich sein muss, auf unserer Riemann'schen Fläche $\lambda = 0$ genau ein solches Querschnittsystem und ein solches Periodenschema zu construiren, wie wir es früher im niedersten orthosymmetrischen Falle benutzten; dadurch würde dann die Theorie der beiden Flächenarten in ein noch klareres Verhältniss gesetzt worden, als dies vermöge der Weichhold'schen Entwickelungen geschieht.

**) Wir können uns dahin aussprechen, dass die Theorie der Abel'schen Functionen unter den Wurzeln der algebraischen Gleichung, von deren Auflösung die Trennung der verschiedenen Schaaren von F_μ abhängt, durch Angabe der zugehörigen Characteristik eine Separation vollzieht; durch die Characteristik wird eine Wurzel vor allen anderen gekennzeichnet.

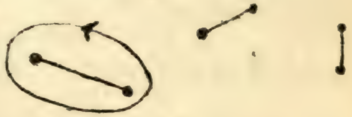
Möge es sich erstlich um die *Elementarcharakteristik eines geraden F_μ*: $\begin{vmatrix} \rho_1 \cdots\cdots \rho_{\lambda-1}\, \rho_\lambda \cdots\cdots \rho_p \\ \rho'_1 \cdots\cdots \rho'_{\lambda-1}\, \rho'_\lambda \cdots\cdots \rho'_p \end{vmatrix}$ handeln. Da werden wir auf Grund unserer früheren Ausführungen gleich sagen können. Die $\rho'_\lambda \cdots\cdots \rho'_p$ sind bei der reellen F_μ jedenfalls gleich 0. Ferner richten sich die Werthe der $\rho_1 \cdots \rho_{\lambda-1}$ darnach, ob die verschiedenen Symmetrielinien $S_1, \cdots S_{\lambda-1}$ der Curve von der F_μ geradzahlig oder ungeradzahlig berührt werden mögen. Wie aber bestimmen sich die Werthe der übrigen ρ, ρ'? Das muſs von der Auswahl derjenigen Bestandtheile unseres Querschnittsystems abhängen, die nicht in die Symmetrielinien fallen.

Noch weniger wiſsen wir a priori über die *Primcharakteristiken der ungeraden F_μ, resp Φ.* [Do. 4.8.92.] Wir können natürlich über die *Differenzen* zweier Primcharakteristiken, die sich auf verschiedene F_μ, bez. Φ beziehen, dieselben Bemerkungen machen, wie eben über die Elementarcharakteristiken. Was aber die Primcharakteristiken selbst angeht, so ist die einzige bis jetzt bekannte Methode zu ihrer Bestimmung diejenige, die ich in Bd. 11 der math. Annalen (1876) für die ebenen Curven 4. Ordnung benutzte. Ich lasse dort nämlich die C_4 in einen doppeltzählenden Kegelschnitt, d. h. eine hyperelliptische Curve übergehen, und benutze bei letzterer die von Prym (oder auch von C. Neumann und Thomae) abgeleiteten Resultate. Natürlich reicht dieser Ansatz genau so weit, wie die hyperelliptische Methode überhaupt, erledigt also die sämmtlichen diasymmetrischen Gebilde, von den orthosymmetrischen Gebilden aber nur die beiden extremen Fälle.

Hier zunächst die Festlegung der Primcharakteristiken für das hyperelliptische Gebilde selbst. Ich benutze dabei die Regel, welche diesbezüglich in Bd. 32 der math. Annalen (1888) von mir aufgestellt und von Herrn Burkhardt begründet worden ist [in unseren Arbeiten über hyperelliptische Sigmafunctionen], die übrigens in der demnächst erscheinenden Dissertation von Hrn. Thompson noch verschiedentlich entwickelt werden wird. Die Function $\vartheta\left|\begin{smallmatrix}g\\h\end{smallmatrix}\right|(j_1^{x,\eta}, \ldots\ldots j_p^{x,\eta})$ wird, wenn man x an den Querschnitten A_β. B_β entlang leitet, abgesehen von Exponentialfactoren, die wir hier bei Seite lassen, die Vorzeichenfactoren $(-1)^{g_\beta}$, $(-1)^{h_\beta}$ erhalten. Wie hängen dieselben mit derjenigen Zerspaltung der Verzweigungsform f_{2p+2} in zwei Factoren

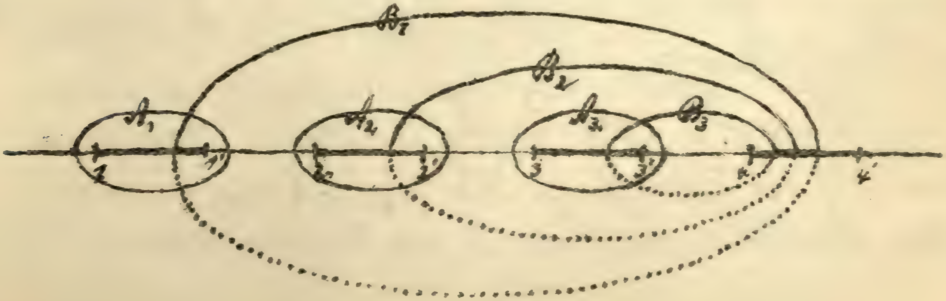
$\varphi_{p+1-2\varrho}\cdot\psi_{p+1+2\varrho}$ zusammen, die unserem $\vartheta\left|{g \atop h}\right|$ entspricht?

Wir beantworten das so, daſs wir zunächst die Durchlaufung nur von „Elementarwegen" in Betracht ziehen und hernach (was kaum erläutert zu werden braucht), die A_ϱ, B_ϱ je aus lauter Elementarwegen zusammensetzen. Elementarwege sollen dabei solche sich selbst nirgends überkreuzende Wege genannt werden, welche 2 der Verzweigungspunkte von den übrigen $2p$ abtrennen.

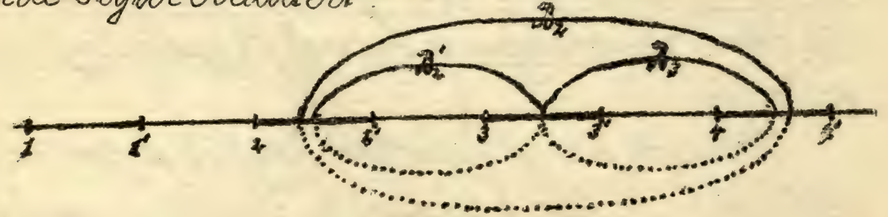


Und die auf sie bezügliche Regel ist diese: *der Vorzeichungsfactor, welcher dem einzelnen ϑ bei Durchlaufung des Elementarwegs zutrifft, ist $+1$ oder -1, je nachdem die beiden von dem Elementarweg umschloſsenen Verzweigungspunkte sich auf die beiden dem ϑ entsprechenden Factoren $\varphi\cdot\psi$ vertheilen oder nicht vertheilen.*

Wollen wir dies an demselben Beispiele näher verfolgen, welches ich l.c. in Anm. 11 behandelte. Wir nehmen zunächst ein hyperelliptisches Gebilde $p=3$ mit 3 reellen Verzweigungspunkten und bringen bei ihm diejenige kanonische Zerschneidung an, welche in folgender Figur dargestellt ist:



es ist dies diejenige Zerschneidung, welche ich gewöhnlich die Weierstraß'Zerschneidung nenne, weil sie eben diejenigen kanonischen Perioden liefert, welche Weierstraß seiner Zeit seiner Theorie der hyperelliptischen Functionen zu Grunde legte. Uebrigens subsummirt sich diese Zerschneidung genau unter die Schemata, welche wir nach Hr. Weichhold für die orthosymmetrischen Fälle kennen lernten. Hier sind nun A_1, A_2, A_3, B_3 selber Elementarwege, wie man sofort sieht, und auch B_1 ist ein Elementarweg, weil durch dasselbe 1 und 1' von den anderen Verzweigungspunkten abgetrennt werden. B_2 aber setzt man aus den beiden Elementarwegen: $B_2' = 2'3$ und $B_3 = 3'4$ zusammen, wie folgende Figur erläutert:



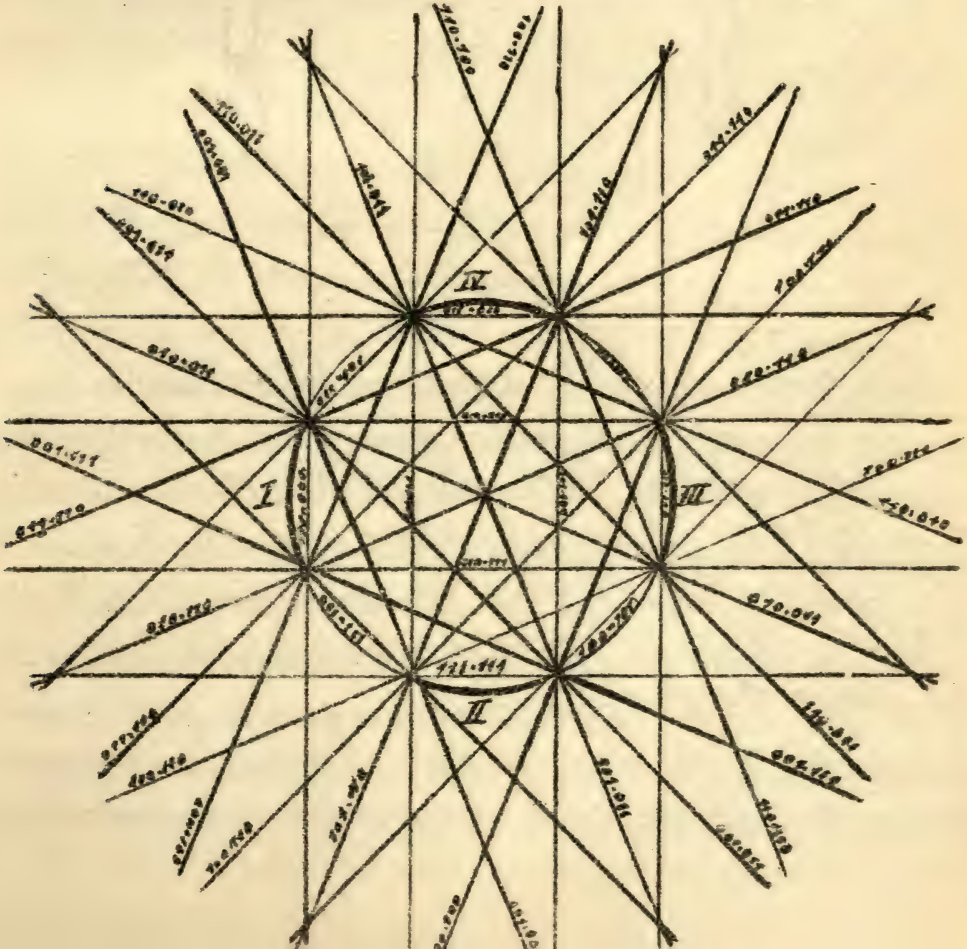
Handle es sich nun um die Primcharakteristik $\left|\frac{g}{h}\right|$ welche irgend einer der 28 Zerspaltungen von f_8 in $\varphi_2 \cdot \psi_6$ zugeordnet ist, etwa derjenigen, wo φ_2 in 1 und 1' verschwindet. Wir bekommen dann nach unserer Regel für die Durchlaufung der Elementarwege

	A_1	A_2	A_3	B_1	B_2'	B_3
die Vorzeichenfactoren	-1	-1	-1	$+1$	-1	-1

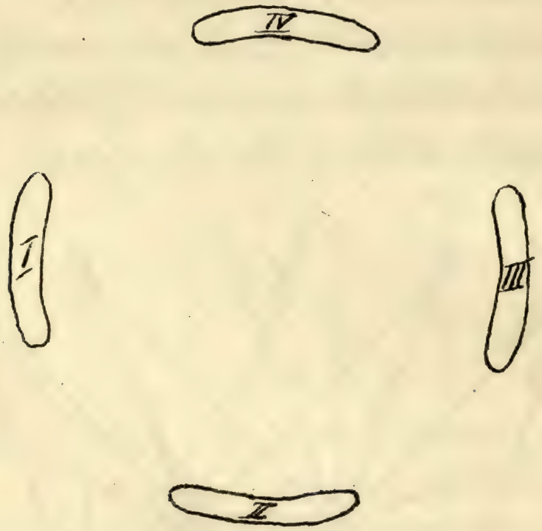
daher für Durchlaufung von B_3 den Vorzeichenfactor +1. Wir stellen hieraus die folgende Tabelle zusammen:

A_1	A_2	A_3	B_1	B_2	B_3
$(-1)^1$	$(-1)^1$	$(-1)^1$	$(-1)^0$	$(-1)^0$	$(-1)^1$

und lesen von da das Resultat ab: Die Primcharakteristik der ausgewählten Zerspaltung von f_8 ist 111, 001. Es erübrigt, dass wir die gleichen Ueberlegungen für alle anderen Zerspaltungen von f_8 in $f_2 \cdot \psi_6$ durchführen und dann zur hyperelliptischen C_4, d.h. dem doppeltzählenden Kegelschnitte mit 8 reellen Scheiteln, übergehen. *Wir bekommen so für die 28 Doppeltangenten dieses letzteren die folgende Figur:*



Und diese Figur bleibt ungeändert in Gültigkeit, wenn wir jetzt schlieſslich zur allgemeinen C_4 übergehen, indem wir etwa die in der Figur stärker ausgezogenen Segmente des Kegelschnittes zu Ovalen der Curve vierter Ordnung dehnen.



Man beachte etwa noch, daſs die ersten drei Zahlen g_1, g_2, g_3 der Characteristik gerade dann gleich 0 oder 1 werden, wenn das zugehörige Oval seitens der Doppeltangente ungeradzahlig oder geradzahlig berührt wird. Das ist genau umgekehrt, wie im Falle der Elementarcharacteristiken.

Endlich mögen wir hervorheben, daſs man an der so gewonnenen Figur alle die Gruppirungssätze, welche man betreffs der 28 Doppeltangenten aus den Characteristiken $\left|\frac{g}{h}\right|$ derselben abgeleitet hat in concreto controliren und in's Einzelne verfolgen kann.

[Fr. 5.8.92.]

Wir schliessen hiermit unsere Erläuterungen über die geometrischen Anwendungen der Abel'schen Function.

Der Kernpunkt war die Aufstellung der Schemata für die reellen Bestandtheile der jedesmal in Betracht zu ziehenden $\tau_{\alpha\beta}$, p. 259ff., 273, 275 Nach der auf p.   unten beigefügten Bemerkung können wir, wenn wir wollen, der nulltheiligen Curve dasselbe bezügliche Schema ertheilen, wie der niedersten orthosymmetrischen. So bleiben dann $\left[\frac{p+2}{2}\right]$ orthosymmetrische Schemata und p diasymmetrische (im Ganzen $\left[\frac{3p+2}{2}\right]$). Die Zahl dieser Schemata kann auch nicht etwa durch Abänderung der Querschnittsysteme noch weiter herabgedrückt werden. Denn zwei Curven, welche bei irgendwelcher Auswahl der Querschnitte dasselbe Schema angeben, liefern vermöge der zugehörigen ungeraden ϑ dieselbe Zahl reeller Φ, und die Zahlen reeller Φ, die wir bei unseren orthosymmetrischen Curven haben: $2^{p-1}(2^{\lambda}-1)$ so wie diejenigen, die wir bei den diasymmetrischen Curven haben: $2^{p+\lambda-2}$ sind, wenigstens bei geradem p alle verschieden {bei ungeradem p werden die beiden Zahlen, welche der orthosymmetrischen Curve mit $\lambda = 2$ und der diasymmetrischen Curve mit $\lambda = 1$ zugehören, in der That einander gleich }. Wir müssen da gegen eine Arbeit von *Hurwitz* Stellung nehmen (Bd. 94 des Journals, 1882), in welcher *Hurwitz* ein mit unserer Fragestellung sehr verwandtes Problem behandelt, nämlich dasjenige der Realität der Perioden reeller $2p$.fach periodischer Functionen von p. Argumenten. Hurwitz hat dort scheinbar nur $p+1$ Schemata, nämlich unsere p diasymmetrischen Schemata für $\lambda = 1, 2 \ldots p$, und unser orthosymmetrisches Schema für $\lambda = p+1$ (wo sämmtliche $\tau_{\alpha\beta}$ rein imaginär sind). Aber es liegt dies nur daran, weil er die Untersuchung nicht so weit durchgeführt hat, wie wir. Er legt nämlich keinen Werth darauf, ein *kanonisches* Periodenschema zu haben. Und geht man von der hierin liegenden Forderung ab, so kann man die $\left[\frac{p}{2}\right]$ Schemata, welche bei uns den orthosymmetrischen Fällen mit $p-1$, $p-3$ ..... Symmetrielinien entsprechen, in der That sofort auf die correspondirenden diasymmetrischen Fälle zurückführen. Es genügt in unseren Schematen die Columnen B_p und B_{p-1}, B_{p-2} und $B_{p-3} \ldots B_{\lambda+1}$ und B_λ beziehungsweise miteinander zu vertauschen.

Schluſsbemerkungen.

Indem wir nunmehr diese Vorlesung schlieſsen, ist der eine der drei Programmpunkte, die wir am Ende des vorigen Semesters in Aussicht nahmen, unerledigt geblieben: die Theorie der auf einer Riemann'schen Fläche bestehenden *algebraischen Correspondenzen* $f(x,y)=0$ und die nähere Begründung resp. Umgränzung des für sie geltenden *Correspondenzprincips*. Sei es gestattet, dieserhalb auf die Darstellung zu verweisen, welche die bezüglichen Theorieen inzwischen in den von *Fricke* herausgegebenen Vorlesungen über elliptische Modulfunctionen gefunden haben. Es handelt sich um das 2te Kapitel des sechsten Abschnitts daselbst, wo in der That genau diejenigen Betrachtungen entwickelt werden, die ich ursprünglich für die vorliegende Vorlesung in Aussicht genommen hatte.

Dies ist natürlich nicht die einzige Erweiterung, welche wir bei systematischer Darstellung den Entwickelungen dieser Vorlesung würden können zu Theil werden laſsen. Wir haben auf unseren geschloſsenen Riemann'schen Flächen nur *algebraische Functionen* und *Integrale algebraischer Functionen* studirt, d.h. Functionen ohne wesentlich singuläre Punkte, welche entweder (auf der Fläche) eindeutig sind, oder periodisches Verhalten zeigen. Der nächste Fortschritt wäre, daſs wir überhaupt solche Functionen auf der Fläche in Betracht ziehen, welche sich bei Umläufen über die Fläche hin linear substituiren (vergl. etwa die Erläuterungen in Bd. 23 der Annalen [1883], p 592 ff). Da sind erstlich Functionen y, welche sich nur in αy verwandeln (darunter die algebraischen „Wurzelfunctionen"), dann die zuerst von Prym in Crelle 70 untersuchten y, welche in $\alpha y + \beta$ übergehen, endlich die y, die allgemeine lineare Substitutionen $\frac{\alpha y + \beta}{\gamma y + \delta}$ erfahren und als Quotienten zweier Particularlösungen y_1, y_2 einer „zur Riemann'schen Fläche gehörigen" linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung angesehen werden können. Da sind ferner Systeme von n Functionen $y_1, y_2, \ldots . y_n$, welche sich bei Umläufen über die Fläche hin homogen linear substituiren, also in $\sum_1^k \alpha_{2k} y_k, \ldots . \sum_1^k \alpha_{nk} y_k$ übergehen: die Lösungen irgend welcher „zur Riemann'schen Fläche gehörigen" linearen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung, etc. etc. Dann wieder mögen wir die Erweiterung so suchen, daſs wir nicht Functionen eines Flächenpunkts, sondern mehrere Punkte $x, y, \ldots$ unserer Riemann'schen Fläche in Betracht ziehen. Hier können z. B. die eben berührten Untersuchungen über algebraische Correspondenzen auf der Fläche rubricirt werden. Hierher gehören ferner die Abel'schen Functionen, d.h. $2p$ fach periodische Functionen der Integralsummen $\int_a^{x_1,z_1} + \int_a^{x_2,z_2} + \ldots\ldots \int_a^{x_m,z_m}$ wo m irgendwelche Zahl sein mag. Man hat die algebraischen Functionen zweier Flächenpunkte in unserer Zeit insbesondere dazu benutzt, um specielle zweidimensionale algebraische Gebilde („Flächen" des R_3, etc.) in ähnlicher Weise zu definiren und zu discutiren, wie wir dies betreffs der algebraischen „Curven" mit den Functionen eines Flächenpunktes in ausgiebigster Weise gethan haben. Endlich aber bietet sich die Möglichkeit alle die so aufgezählten Functionen *in ihrer Abhängigkeit von den Constanten der Riemann'schen Fläche*, d.h. von *den $3p-3+\varrho$ Moduln, welche die Fläche besitzt*, zu betrachten. Die Theorie verwandelt sich so in eine Theorie der „Modulfunctionen", die freilich nur erst im Falle $p=1$ genauer bearbeitet ist. Das Wesentliche im Falle $p=1$ ist ja, daſs man die elliptischen Functionen nicht sowohl als doppeltperiodische Functionen des Integralwerthes, sondern als Functionen der Integralperioden ansieht. Etwas Analoges wäre bei höherem p zu versuchen. Es ist unmöglich, hier irgendwie noch darauf einzugehen, welche Wendung die hiermit angedeutete Fragestellung in der Theorie der automorphen Functionen genommen hat.

L. H
12/6

7 DAY USE
RETURN TO DESK FROM WHICH BORROWED

ASTRON-MATH-STAT.
LIBRARY

This publication is due on the LAST DATE
and HOUR stamped below.

Due end of SUMMER quarter
Subject to recall after —

AUG 09 1984

Rec'd UCB, A/M/S

NOV 13 1987

RB 17–50*m*-7,'65
(F5759s10)4188

General Library
University of California
Berkeley

QA
333
K6
1894
MATH.
STAT.
LIBRARY

U.C. BERKELEY LIBRARIES
C037500053